

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM

PROCEEDINGS

VOLUME XXXIV

No. 5

President: J. VAN DER HOEVE.

Secretary: B. BROUWER

CONTENTS

- J. VERSLUYS: "The problem of dry or unsaturated strata", p. 591.
- W. H. KEESOM and J. H. C. LISMAN: "The melting-curve of hydrogen to 450 kg/cm²", p. 598.
- W. H. KEESOM and J. H. C. LISMAN: "Methods and apparatus used in the Cryogenic Laboratory. XXIV. A cryostat for temperatures between 20.3 and 27.5° K.", p. 602.
- W. H. KEESOM und K. CLUSIUS: "Die Umwandlung flüssiges Helium I — flüssiges Helium II unter Druck", p. 605.
- L. S. ORNSTEIN, A. A. KRUIHOF and W. A. M. DEKKERS: "Excitation of the secondary and the Balmer spectrum of Hydrogen by electronic impact in molecular Hydrogen and by protons of high velocity", p. 610.
- J. G. VAN DER CORPUT und J. POPKEN: "Ueber den kleinsten Wert einiger quadratischer Formen", p. 615.
- J. BÖESEKEN, F. TELLEGEN and P. COHEN HENRIQUEZ: "On the Two Isomeric Naphthodioxanes 1.2.5.8, an example of cis-trans isomerism in oxygenous six-rings of the decahydro-naphthalene type", p. 631. (With one plate).
- J. W. VAN WIJHE: "Die Terminalbeuge des Vorderhirns bei den Chordaten und die prootischen Nerven der Kranioten bei Amphioxus. II. Schluss des Riechorgans", p. 636.
- A. A. NIJLAND: "Mittlere Lichtkurven von langperiodischen Veränderlichen. III. R. Trianguli", p. 654. (With one plate).
- H. H. MOOY: "On the Crystal Structure of Methane. II". (Communicated by W. H. KEESOM), p. 660.
- M. ZIEGLER: "A complete arrangement for the investigation, the measurement and the recording of rapid airspeed fluctuations with very thin and short hot wires", p. 663. (With one plate).
- F. ZERNIKE: "Eine asymptotische Entwicklung für die grösste Nullstelle der Hermiteschen Polynome". (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 673.

- O. BOTTEMA: "Die Nullstellen gewisser durch Rekursionsformeln definierten Polynome". (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 681.
- W. A. VERSLUYS: "A solution of the equation of the vibrating string". (Communicated by Prof. R. WEITZENBÖCK), p. 692.
- E. H. BÜCHNER and G. POSTMA: "The salting out of gelatin sols by salt mixtures". (Communicated by Prof. F. A. H. SCHREINEMAKERS), p. 699.
- G. P. ITTMANN und M. G. RUTTEN: "Ueber das Rieckesche Prinzip". (Communicated by Prof. L. RUTTEN), p. 703.
- P. H. VAN CITTERT: "Het instrumentarium, door VAN SWINDEN bij de invoering van het Metrieke Stelsel gebruikt". (Communicated by Prof. L. S. ORNSTEIN), p. 707.
- J. G. HEYL: "Blutungserscheinungen bei Pflanzen". Communicated by Prof. F. A. F. C. WENT), p. 718.
- G. RÉVÉSZ: "Ueber die Natur der optischen und haptischen Formwahrnehmung". (Communicated by Prof. B. BROUWER), p. 725. (With one plate).
- P. DE WIJKERSLOOTH: "Die falschen und die wahren Mylonite des tertiären Granitkomplexes von Elba". (Communicated by Prof. H. A. BROUWER), p. 732.

Geology. — *The problem of dry or unsaturated strata.* By J. VERSLUYS.

(Communicated at the meeting of May 30, 1931.)

The interstices of the sediments in the earth's crust form one inter-connecting network of fine pores to a great depth. These pores are all water filled except where oil or gas have replaced it. In each point of the earth's crust the water has a hydrostatic pressure approximately equal to the pressure exerted by a column of water from that point to the earth's surface above it.¹⁾

Oil and gas must have the same pressure as the water they have replaced, so that they also have the pressure inherent to the depth where they occur (see however the last page).

No other conception is possible, because most sediments have been deposited under water. The sediments which were deposited on the continents above the water, must have been covered with water or have got into the water saturated regions of the earth's crust before younger sediments have been deposited upon them. Afterwards the volume of the pores may decrease owing to compacting pressure, so that the deeper seated sediments constantly tend to discharge part of their confined water which rises through the overlying beds. Except in volcanic regions, temperature does not increase with depth to such a degree, that the vapour pressure becomes greater than the pressure which is inherent to the depth, so that no water will evaporate at depth and no depletion of the pores can be caused by temperature.

Petroleum and gas are encountered in the coarse sediments and their occurrence is generally restricted to the highest parts of the folded structures of the earth's crust. The fact, that oil and gas tend to accumulate in the highest parts of the strata has for a long time been attributed to the buoyancy of the two lighter substances on water. Thus the fact that oil and gas by preference gather in the highest parts of the structures was ascribed to the segregation of the lighter substances from an emulsion or a foam.

The problem of how oil and gas have been concentrated especially in the coarser strata was not at first considered, it was only taken as a matter of fact. Neither was it considered what filled the pores of the finer sediments. In such sediments the pores may be so narrow, that the motion of liquids through them is very slow; several hydrologists fallaciously consider them to be dry and absolutely impervious. Accordingly the

¹⁾ J. VERSLUYS: "The origin of artesian pressure". These Proceedings XXXIII, pp. 214—222, 1930.

coarser beds, are often erroneously regarded as closed reservoirs, if they have no exposures at the surface.¹⁾

No real explanation was given of the cause of finer beds acting as barriers to the motion of oil and gas, with the result that they are retained in certain coarse strata. The finer grained strata were simply said to be tight.²⁾

For a long time it was known that there were exceptions to the rule that oil and gas occur in the structural "highs". All discrepancies met with before 1906, however, could easily be explained on the principle of buoyancy; in that year, however, deviations were encountered which could not be explained by buoyancy unless a new principle was adopted to link them with this theory.

In this year in Pennsylvania oil accumulations were found on the flanks as well as in the synclines³⁾. The idea that differences in the specific gravity caused the segregation of gas and oil at the top was not abandoned, but in 1907 a new hypothesis was put forward in order to explain these occurrences of oil and gas a consequence of buoyancy. It was therefore assumed that layers bearing oil at the flanks of the anticlines were partly filled with water, while the beds with synclinal oil should be free of water. In ordinary water filled sands oil and gas would ascend to the crest whereas oil would descend to the syncline in dry strata and gather at the top of the water in strata that were water filled to a certain level.

As to the behaviour of gas there would be only one possibility in the author's opinion, viz.: the gas would spread throughout the pores of the layer as far as it was not water filled. This however was not within the scope of the principles at that time. The supposition was ventured that the pores of the dry or unsaturated strata were filled with air under atmospheric pressure. This was supposed to be the case in strata which lay below sea level.

Two distinct conceptions of the origin of dryness prevail. One is the idea of "connate dryness". It was assumed that dry strata had been deposited by rivers in the coastal regions. Successive regressions and transgressions of the sea had alternately exposed the territory to the atmosphere and submerged it, so that beds became dry and air filled and were afterwards covered with marine sediments. The advocates of this "connate dryness" believed that the air under atmospheric pressure would have prevented the penetration of the sand by water when they were submerged.

The second conception was that the so-called dry layers were water

1) The writer treated this subject in a former paper: "The origin of artesian pressure", i.e.

2) See J. VERSLUYS: "Compaction an agent in accumulation of oil at the anticlines". These proceedings XXXIII, pp. 990—995, 1930 and: "Can absence of edgewater encroachment be ascribed to capillarity", Bull. Am. Ass. Petr. Geol., XV, pp. 189—200, 1931.

3) Before correcting the proof of this paper the writer found that C. A. ASHBURNER, Science V, p. 43, 1885 and VI, pp. 184 and 185, 1885 stated that several Pennsylvanian gas wells were located in the synclines.

filled when they became buried, but that they were desaturated subsequently. The process of desaturation was explained in three ways. One explanation involved evaporation owing to heat which should make the strata dry at a depth of 450 to 600 metres ¹⁾. The possibility of such an evaporation has been discussed in the foregoing pages. The second explanation was that orogenetic movements of the earth's crust and subsequent denudation had decreased the compacting pressure of sediments so that clays and shales could expand again. During the expansion these fine grained sediments should absorb water which was withdrawn from the coarser sands. These were in this way entirely or partly depleted. The third conception was that water of the deeper strata has been evaporated owing to the circulation of gases, principally methane, (generated at depth) escaping at the surface, mainly through fissures.

Whatever assumption is made, regarding the cause of the supposed dryness of the strata, the idea that dry strata occur at great depth implies the supposition that the overlying and the underlying strata are materially impervious. Otherwise, the dryness could not subsist. As it has been stated above, several geologists actually believe that only the coarser strata are aquifers, and that the shales and clayey strata are absolute barriers to the passage of liquids. The writer, however, does not accept this theory and consequently he does not agree to the principle that beds containing only air at atmospheric pressure can exist at a considerable depth. He admits that oil-bearing layers after most of their oil has been tapped by exploitation have their pores principally filled with gas under a much lower pressure than adherent to their depth, are not always immediately invaded by water and that mines at a great depth may have a small influx of water, but such conditions could not last for the duration of geologic periods (The Berea sand which is supposed to be dry is of Mississippian age).

A question to be answered is, whether there is any evidence of the occurrence of porous and well permeable beds filled with air under a pressure of one atmosphere at great depth. Some advocates of this principle believe that it is proved by the fact that a borehole in such sands is not immediately filled with water, whereas the shallower sands when pierced by the drill show abundant water. This again can be explained by a great resistivity with respect to the motion of water, owing to the narrowness of the pores. Another argument should be that in certain cases the sands which are supposed to be dry, take up water from the borehole with great avidity. This, however, proves only that sands with little resistivity to motion of liquids or gases have been encountered, in which the pressure of the liquid is perhaps slightly lower than in the borehole.

¹⁾ Only when the proof of this paper was ready the writer received KEMP's original paper (VII of the list at the end of this paper). It appears that the loss of water from sediments was not entirely attributed to heat; other factors were also assumed to be involved.

If the liquid in the borehole is a mudladen water there may be a considerable excess of pressure in the hole.

Therefore the two mentioned observations which are cited as proofs of the sand being dry and containing only air under atmospheric pressure, do not prove this point at all. The first, that such sands outside the oil accumulations have a great resistivity, on the contrary is in agreement with the writer's explanation of the occurrence of oil and gas outside the anticlines, which will be explained hereafter.

Moreover it was stated, that the fact that cores from the oil-bearing part of the so-called dry strata are not saturated with oil when they come to the surface, points to the conclusion that these strata are unsaturated and have low pressures.

One should however not lose sight of the fact, that oil contains dissolved gas, which is liberated when pressure is diminished, so that cores when brought to the surface are never saturated with oil, the escaping gas expelling part of the oil. In coarse sands this may be accomplished sooner than in fine grained sands, but the phenomenon must under all circumstances be perceptible. So in the writer's opinion no proofs of the dryness of certain sands and of the low pressure prevailing in them have been supplied.

The only observation which has lead to the conclusion that certain beds are dry, is that oil therein occurs outside the anticlinal regions. As for the rest the conclusion is merely based on hypotheses. These hypotheses partly concern the way in which the supposed state of dryness has arisen.

Furthermore they are the old theory that oil rises to the anticlines as a consequence of its small specific weight, whilst unconsciously two other principles have been adopted:

- 1st. that such beds are uniformly porous, and
- 2nd. that they are overlain and underlain by absolutely impermeable layers.

Regarding the first of these two points the reader may refer to a former paper ¹⁾ in which the writer uttered the opinion that difference in specific gravity of the fluids in the earth's crust is probably not the main cause of accumulation of oil and gas in the anticline. This question he proposes to expatiate on in a future paper.

In his opinion the fine globules of oil and bubbles of gas carried along by the water, which circulates through the pores of the sediments, are left behind in the coarser portions. Generally speaking it can be said that this water moves from the mountains to the lowlands, mainly longitudinally through the coarser layers and transversally through the finer ones. Principally in the anticlines where all layers come nearest to the surface, water rises across the finer layers from one coarse layer to the next overlying it, so that the anticlines are favorable places for the accumulation of oil

¹⁾ "Compaction an agent in the accumulation of oil at the anticlines", These Proceedings XXXIII, pp. 990—995, 1930.

and gas. This is not true of the anticlines near the mountains, where the altitude of the surface may be so high, that the reverse takes place. The flow of water from the mountains to the lowlands may partly be caused by compaction, due to orogenic pressure, as suggested by M. R. DALY¹⁾, but in the writer's opinion it is probably mainly a consequence of the differences of altitude at the surface of the earth. This opinion is supported by the fact that the anticlines in or near the mountains are generally not oil bearing in formations which contain oil further afield. This means that the anticlines are only oilbearing in the lower regions where water rises to the surface. In case, however, the coarser layers are not uniformly porous, but composed of coarser and finer parts, during its longitudinal motion water goes over from finer to coarser portions, so that the accumulation of oil and gas may take place in any coarser patch of the sands or sandstones.

The occurrence of oil and gas in the anticlines or synclines could quite well be explained as a consequence of differences of the cross-sections of the pores in the different portions of the sand. If this explanation is adopted, the improbable existence of strata containing air under atmospheric pressure at great depth can be abandoned.

There is some evidence against the theory of strata being partly filled with oil and water and partly with air under atmospheric pressure. The wells in synclinal oil accumulations flow naturally. This means that such oil contains gas which is dissolved under a considerable pressure. If such oil were stored in the deeper parts of a porous bed containing only low pressure air, the oil would first rise in the shape of a foam and then gradually percolate slowly down to the synclines, or to the top of the water filling the lower part of the bed. The gas would then spread evenly through the higher parts of the bed, up to the crests of the anticlines. Moreover in some descriptions of synclinal oil it is stated, that there was high pressure gas above the oil, but yet the authors of such papers asserted that the anticlinal portions are filled with air under low pressure. This is not possible if the bed is porous throughout. The writer's conception is, that oil and gas accumulate at the anticline if the bed may be considered uniformly porous but if there are finer and coarser portions in a sand or sandstone, oil and gas may accumulate in the coarser portions, independent of their place as to the structure. The pores of the finer portions then are water filled.

Besides oil might occur in the syncline in uniform layers should there be sufficient gas to fill the higher parts of the structures. This has been pointed out by the writer in a previous paper. (See No. XXXI of the list at the bottom of this paper.) It appears from the descriptions of several fields that this actually may occur. There are, however, theoretic grounds to believe, that the total height, over which a layer can be gas filled, is

¹⁾ "The diastrophic theory". Am. Inst. Min. Eng. Trans. LVI, pp. 733—753, 1916.

limited.¹⁾ Even at a considerable depth, the prevailing pressure is not high enough to compress the gas to a specific weight which approaches that of water. Therefore, when at the bottom of the gas filled part of a layer the pressure is equal to the pressure inherent to the depth, at top the pressure of the gas must be considerably lower than of the contiguous water in the overlying finer grained layer. This difference must be outweighed by capillary forces, which however, are limited. Consequently, if the height of a gasaccumulation exceeds a certain limit, it will penetrate the caprock and rise to the next higher coarse layer.

Several accumulations of oil which are said to be synclinal seem to be situated in small shallow secondary synclines in anticlines, or in the synclinal folds in the flanks of anticlines or domes, so that such oil occurrences can also be called anticlinal.

There are oilfields, in the outcropping part of sands, the top parts of which are sealed with asphalt. If such a layer is tortuous, the sloping synclines may be oil bearing, but this has little to do with the occurrence of oil in real synclinal troughs.

Perhaps the occurrences of true synclinal oil are not so numerous as it might be inferred from literature.

Summarizing the writer would state as his belief that the existence of unsaturated strata at depth, overlain by water filled beds is very improbable and that no actual proof for their existence has been furnished. Such a hypothesis has only been put forward in order to link the observation of synclinal occurrence of oil with the buoyancy theory. In the author's opinion, however, this phenomenon can be explained on the assumption that formations which bear oil outside the anticlines have variable porosity. The main cause of the accumulation of oil or gas in the anticlines as well as in the synclines and on the flanks would not therefore appear to be buoyancy, but might be more logically attributed to the flow of water together with the tendency of oil and gas of not leaving coarser strata or coarser portions of the strata when they have once entered them.

¹⁾ See: "Compaction an agent etc.", l.c.

LITERATURE ON DRY OR UNSATURATED STRATA.

- I. A. S. COOPER: "The genesis of petroleum and asphaltum in California". *Cal. State Mining Bureau, Bull.* 16, Dec. 1899.
- II. L. H. WOOLSEY: "Economic geology of the Beaver Quadrangle, Pa". *U. S. Geol. Survey, Bull.* No. 286, 1906.
- III. R. W. STONE and F. G. CLAPP: "Oil and gas fields of Greene County, Pa", *U. S. Geol. Survey, Bull.* 304, 1907, pp. 79—82.
- IV. W. T. GRISWOLD and M. J. MUNN: "Geology of oil and Gas fields in Steubenville, Burgettstown and Claysville Quadrangles". *U. S. Geol. Survey, Bull.* 318, 1907.
- V. R. ARNOLD and R. ANDERSON: "Geology and oil resources of the Santa Maria oil District, Cal.". *U. S. Geol. Survey, Bull.* 322, 1907.
- VI. —————: "Preliminary report on the Coalinga oil district, Cal." *U. S. Geol. Survey, Bull.* 357, 1908.
- VII. J. F. KEMP: "Waters, meteoric and magmatic". *Mining and Scientific Press*, XLVI. pp. 705—708, 1908.

- VIII. H. F. BAIN: "Geology of Illinois Petroleum Fields". *Econ. Geol.* III, pp. 481—491, 1908.
- IX. W. T. GRISWOLD: "Structure of the Berea oil sand in the Flushing Quadrangle". *U. S. Geol. Survey Bull.* 346, 1908.
- X. M. J. MUNN: "The anticlinal and hydraulic theories of oil and gas accumulation". *Econ. Geol.*, IV, pp. 509—529, 1909.
- XI. C. W. WASHBURNE: "The Florence Oil Field, Colorado", *U. S. Geol. Survey, Bull.* 381, pp. 516—544, 1910.
- XII. M. R. CAMPBELL: "Historical review of the theories advanced by American geologists to account for the origin and accumulation of oil". *Econ. Geol.* VI, pp. 363—398, 1911.
- XIII. R. H. JOHNSON: "The necessity for a theory of differential cementing in prospecting for oil". *Econ. Geol.* VII, p. 708, 1912.
- XIV. M. J. MUNN: "The Menifee Gas Field and the Ragland Oil Field, Kentucky". *Bull. U. S. Geol. Survey* 531, pp. 9—26, 1913.
- XV. D. D. CONDIT: "Oil and Gas in the northern part of the Cadiz Quadrangle, Ohio". *U. S. Geol. Survey Bull.* 541, pp. 9—17, 1914.
- XVI. R. H. JOHNSON: "The rôle and fate of connate water in oil and gas sands". *Trans. A. I. M. E.* LI, pp. 587—592, and discussion by various authors, 1916.
- XVII. F. REEVES: "The absence of water in certain sandstones of the Appalachian oil fields". *Econ. Geol.* XII, pp. 354—378, 1917.
- XVIII. E. W. SHAW: "Discussion on F. REEVES' paper (Nº. XVI). *Econ. Geol.* XII, pp. 610—628, 1917.
- XIX. R. VAN A. MILLS and R. C. WELLS: "The evaporation and concentration of "waters associated with petroleum"". *U. S. Geol. Survey, Bull.* 639, 1919.
- XX. D. HAGER: "Practical oil geology". 3rd edition, pp. 55—57, 1919.
- XXI. R. G. MOORE: "General Geology of oil and gas". *State Geol. Survey of Kansas Bull.* 6, pp. 48 and 52, probably 1921.
- XXII. J. L. RICH: "Shoestring sands of Eastern Kansas". *Bull. Am. Ass. Petr. Geol.*, pp. 103—113, 1923.
- XXIII. A. BEEBY THOMPSON: "Oilfield exploration and development". Vol. I, pp. 191—192, 1925.
- XXIV. W. L. RUSSELL: "Relation between isocarbs and oil and gas production in Kentucky", *Econ. Geol.* XX, pp. 249—260, 1925.
- XXV. J. L. RICH: "Further observations on shoestring oil pools of Eastern Kansas", *Bull. Am. Ass. Petr. Geol.* VI, pp. 568—580, 1926.
- XXVI. B. HARTLEY: "Certain relations between production and structure in Northern Osage County, Oklahoma", *Bull. Am. Ass. Petrol. Geol.* VI, pp. 1035—72, 1926.
- XXVII. R. D. BUSH and V. H. WILHELM: "Production losses into low pressure oil and gas sands". *Summary of operations in California Oil Fields, Calif. State Mining Bureau.* XII, Nº. 5, pp. 5—12, Nov. 1926.
- XXVIII. J. F. ROBINSON: "Geology of the Appalachian Territory". *Oil and Gas Journal*, June 16, 1927, pp. G 12—G 30.
- XXIX. H. H. CHARLES: "Oil and Gas resources of Anderson County, Kansas". *Bull. Univ. Kansas* XXVIII, Nº. 12, 1927.
- XXX. W. T. THOM: "Synclinal oil occurrence and regional uplift". *Bull. Am. Ass. Petr. Geol.* XII, pp. 554—555, 1928.
- XXXI. J. VERSLUYS: "Synclinal oil and unsaturated strata". *Proc. Royal Academy*, XXXI, pp. 1086—1090, Amsterdam 1928.
- XXXII. "Structure of typical American Oil Fields", Vol. I, 1929 (Symposium).
- XXXIII. "Ditto", Vol. II, 1929.
- XXXIV. C. CRONEIS: "Geology of the Arkansas Paleozoic area". *Ark. Geol. Survey, Bull.* 3, 1930.
- XXXV. W. A. VER WIEBE: "Oil fields in the United States". New-York 1930.

Physics. — *The melting-curve of hydrogen to 450 kg/cm².* By W. H. KEESOM and J. H. C. LISMAN. (Communication N^o. 213e from the Physical Laboratory at Leiden).

(Communicated at the meeting of May 30, 1931.)

§ 1. *Introduction.* The melting-curve of hydrogen was already investigated in this laboratory to 245 kg/cm² ¹⁾. There was a slight uncertainty in the manometer corrections of the last measurements, and therefore the whole curve was measured again and extended to 450 kg/cm². The method is the same as described in Comm. N^o. 184a.

§ 2. *Apparatus.* Pressures above 250 kg/cm² correspond to temperatures above the normal boiling-point of hydrogen; therefore a cryostat has been constructed ²⁾, in which the hydrogen boils under a pressure higher than 1 atm. (maximum 4 atm. above atmospheric pressure) and by means of which measurements can be made at temperatures between 20.3 and 27.5° K.

The temperatures below 20.6° K were measured with the platinum thermometer *Pt* 31; for higher temperatures *Pt* 64 was used, which has been calibrated between 20.3 and 27.3° K against *Pt* 24, the latter having been compared with the helium thermometer in 1926.

The pressures were read on a metal manometer, whose corrections were determined with a pressure-balance; these corrections were determined before and after the measurements. The pressure-balance has been compared with the pressure-balance of the VAN DER WAALS-foundation at Amsterdam; we are greatly indebted to Dr. A. MICHELS, who kindly allowed us to make this comparison in his laboratory. From this comparison the functional section of the two pistons *P* 1000 and *P* 250 of the Leiden pressure balance could be calculated. For pressures lower than 50 atm. the apparatus has been compared with the closed manometer *M* 60 ³⁾, and the functional section of the pistons *P* 250 and *P* 60 was so determined.

The results are given in table I, which shows a good agreement between the Amsterdam and Leiden pressure-measuring.

¹⁾ H. KAMERLINGH ONNES and W. VAN GULIK, These Proceedings 29, 1184, 1926. Comm. Leiden N^o. 184a. W. VAN GULIK and W. H. KEESOM, These Proceedings 31, 1059, 1928, Comm. Leiden N^o. 192b.

²⁾ W. H. KEESOM and J. H. C. LISMAN, These Proceedings 34, 602, 1931, Comm. Leiden No. 213f.

³⁾ Cf. C. A. CROMMELIN and MISS E. I. SMID, These Proceedings 18, 472, 1915. Comm. Leiden N^o. 146c.

TABLE 1.

Piston	Functional section in cm. ²	Calibration
P 1000	0.2504 ¹⁾	Amsterdam
P 250	1.0002	Amsterdam
P 250	1.0002 ¹⁾	Leiden
P 60	4.0015 ¹⁾	Leiden

§ 3. *The results* are given in table II and represented in Fig. 1; the differences with the earlier measurements are small. The slope of the curve

TABLE II.

T °K	p observed kg/cm ²	p calculated kg/cm ²	$p_{obs.} - p_{calc.}$ kg/cm ²
13.95 ²⁾	0.1	-1.3 ⁵	1.4 ⁵
14.47	16.5	15.5	1.0
15.18	38.9	39.5	-0.6
15.85	62.1	62.8	-0.7
16.48	84.7	85.6	-0.9
17.47	122.8	123.0	-0.2
18.10	146.2	147.7	-1.5
18.75	172.9	174.0	-1.1
18.87	177.1	178.9 ⁵	-1.8 ⁵
19.47	203.8	204.0 ⁵	-0.2 ⁵
19.48	204.5	204.5	0
20.03	228.8	228.1	0.7
20.54	251.7	250.4 ⁵	1.2 ⁵
21.38 ⁵	289.9	288.6	1.3
22.38	336.2	335.2	1.0
23.43	387.6	386.3	1.3
24.01	414.9	415.3 ⁵	-0.4 ⁵
24.66 ⁵	449.4	451.1	-1.7

¹⁾ The mean of the very little differing values at different pressures.

²⁾ Triple-point: H. KAMERLINGH ONNES and W. H. KEESOM, These Proceedings 16, 440, 1913, Comm. Leiden N^o. 137d.

is a little steeper than that of SIMON, RUHEMANN and EDWARDS' curve¹⁾; whether this difference is caused by a different amount of para-hydrogen in the hydrogen used, must be left to further research.

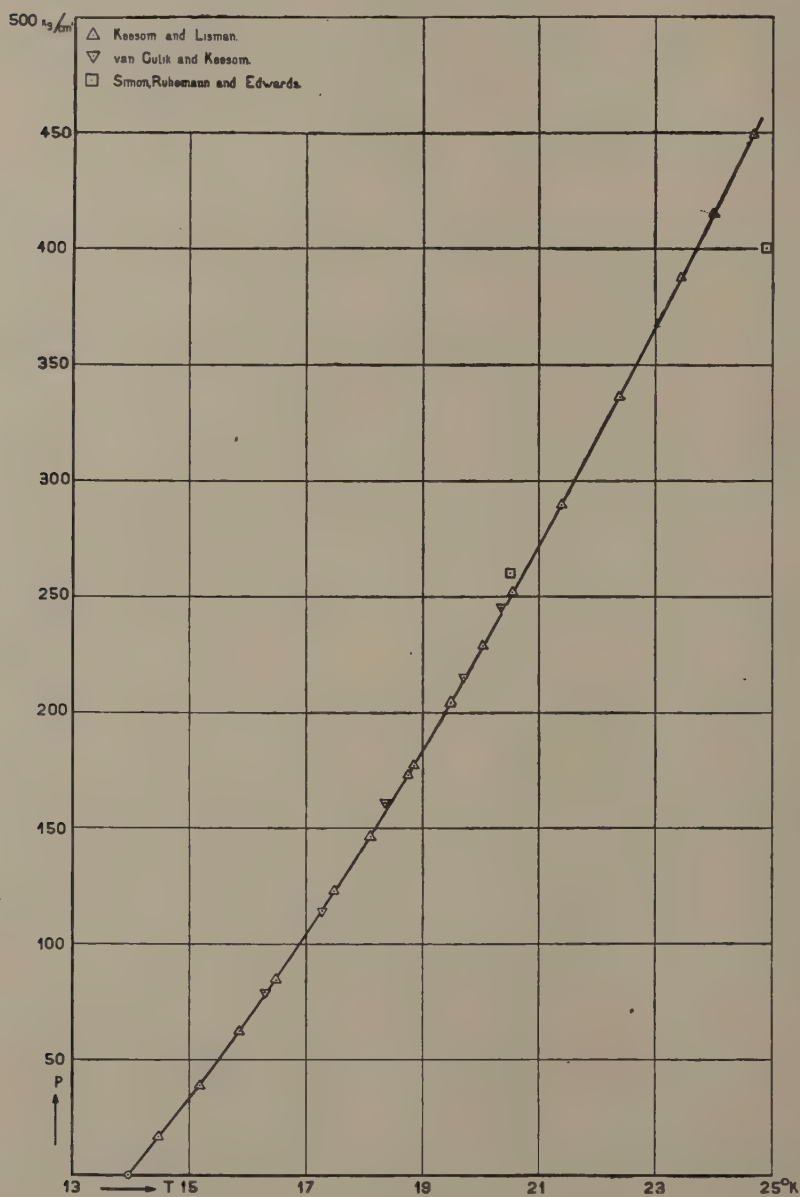


Fig. 1.

¹⁾ F. SIMON, M. RUHEMANN und W. A. M. EDWARDS, Zs. f. phys. Chem. B. 6, 331, 1930.

The two points of SIMON and his coworkers, drawn in our figure, don't agree very well with our curve; it is to be considered indeed, that the relative accuracy of SIMON, RUHEMANN and EDWARDS' measurements was smaller at these pressures than at higher ones¹⁾.

§ 4. We have tested whether SIMON and GLATZEL's formula²⁾

$$^{10}\log(a + p) = c^{10}\log T + b,$$

where a , b and c are constants, can represent our results.

We found with the method of least squares :

$$\begin{aligned} a &= 242.3, \\ b &= 0.26534, \\ c &= 1.84923. \end{aligned}$$

We calculated the pressures (third column of table II) and determined the differences between the observed and the calculated values of p (fourth column).

The deviations are systematical; so the formula can only be used as an interpolation formula, in combination with a deviation-curve.

Finally we calculated the melting pressures corresponding to integer values of T (Table III).

TABLE III.

T °K.	p kg/cm ²	p atm.
14	1.7	1.6
15	33.2	32.1
16	67.3	65.1
17	103.6	100.2
18	142.2	137.6
19	183.1	177.1
20	227.6	220.2
21	272.4	263.5
22	318.6	308.2
23	366.1	354.2
24	414.5	401.0
25	464.2	449.1

¹⁾ F. SIMON, M. RUHEMANN und W. A. M. EDWARDS, l. c. p. 337.

²⁾ F. SIMON und G. GLATZEL, Zs. f. anorg. u. allgem. Chemie, 178, 309. 1929.

Physics. — *Methods and apparatus used in the Cryogenic Laboratory.*
XXIV. *A cryostat for temperatures between 20.3 and 27.5° K.* By
W. H. KEESOM and J. H. C. LISMAN. (Communication N^o. 213f from
the Physical Laboratory at Leiden).

(Communicated at the meeting of May 30, 1931.)

§ 1. *Introduction.* In 1915 KAMERLINGH ONNES¹⁾ already emitted the idea of constructing cryostats for pressures some atmospheres above the normal and stated that with hydrogen it is possible to go with such a cryostat from 20° to 25° K. In this paper a new cryostat built after that principle will be described, which we used in measuring the melting-curve of hydrogen²⁾ at temperatures above 20.6° K.

From the vapourpressure-curve of hydrogen³⁾ it appears that a vapour-pressure of 5 atm. corresponds to a temperature of about 27.5° K. In our cryostat the hydrogen boils under a pressure higher than 1 atm. (maximum 4 atm. above atmospheric pressure) so that measurements can be made at temperatures between 20.3 and 27.5° K. For this range of temperatures this cryostat has these advantages compared with the hydrogen vapour-cryostat⁴⁾ that its treatment is easier and temperatures are more constant. The neon cryostat⁵⁾ can only be used for temperatures between 24.6 and 27.2° K.

§ 2. *The apparatus* (Fig. 1a). The cryostat proper, *A*, made of copper, has a diameter of about 6 cm, a height of 28 cm, the wall is 2 mm thick. Copper was used because of its great heat-conductivity.

After putting in *A* the platinum thermometers and the measuring apparatus for special investigations, the bottom of the vessel is screwed on and soldered with WOOD's metal.

At *B* the thermometer wires protrude air-tight from the German-silver tube; for this purpose two ebonite pulleys *A* and *B* (Fig. 1b) are pressed together by means of the screw *C* and the box *D*. Eight small brass bars *E*, which bear in the middle a double cone and at the ends of which the thermometer wires have been soldered, run through these two ebonite pulleys.

The liquid in *A* evaporates through a German-silver tube; the vapour

1) H. KAMERLINGH ONNES, These Proceedings 18, 507, 1916. Comm. Leiden N^o. 147c. A cryostat for helium, in which a pressure of $2\frac{1}{4}$ atmospheres was maintained over the boiling liquid, was used by MATHIAS, CROMMELIN, KAMERLINGH ONNES, and SWALLOW, Comm. Leiden N^o. 172b, in measuring the rectilinear diameter of helium.

2) These Proceedings, 34, 598, 1931. Comm. Leiden N^o. 213e.

3) P. G. CATH and H. KAMERLINGH ONNES. These Proceedings 20, 1155, 1928. Comm. Leiden N^o. 152a.

4) H. KAMERLINGH ONNES and C. A. CROMMELIN. These Proceedings 23, 1185, 1922. Comm. Leiden N^o. 154c.

Round the vessel *A* a DEWARglass for liquid hydrogen is placed, and the whole is immersed in a DEWARglass for liquid air.

The tube *D*, which can be shut off by the cock *E*, forms a connection between the vessel *A* and the inner DEWARglass. The whole is closed at the top by a German-silver vessel *F*, which is to be filled with liquid air in order to reduce the heat transfer by the tubes (made of German-silver because of its small heat-conductivity); so we are not obliged to take a very long DEWAR-glass.

§ 3. *The experiments.* Before the measurements the apparatus is evacuated thoroughly, because on account of small quantities of impurities, solid at the temperature of liquid hydrogen, the cock *E* should get immovable.

The outer DEWARglass and the vessel *F* are filled with liquid air; some time after that, the inner DEWARglass is filled with hydrogen through the tube *H*; this glass being filled up the vapour exit tube is pinched and the fillingtube *H* is connected to a flask with compressed hydrogen.

Cock *E* being open hydrogen gas is admitted from the flask, and under an additional pressure of 10 cm mercury the liquid hydrogen runs through the tube *D* into the vessel *A*. The hydrogen now evaporates through the cock *L* (near the cryostat) and a wide tube. The drop of the hydrogen level in the hydrogen DEWARglass enables us to conclude whether the vessel *A* is full. Then the cocks *E*, *R* and *L* are shut. Meanwhile the hydrogen, left in the glass, runs out by the tube *K*, which is put in connection with the gas-holder.¹⁾ The pressure in *A* then increases; the required pressure being attained it is kept constant by blowing off through *R*. However, the liquid in *A* has not yet reached the temperature, corresponding to the pressure; therefore a small quantity of hydrogen from the flask is led round *A*, after some 15 minutes the corresponding temperature is reached and can be kept sufficiently constant. After about half an hour again the liquid hydrogen level reaches the top of the thermometer; measurements are terminated then.

It appears that one filling of the cryostat gives us half an hour to make measurements at one temperature. Because the contents of the cryostat is rather small, it is necessary to use a short platinum thermometer, in order that the level of the evaporating liquid reaches the top of the thermometer as late as possible. In our experiments on the melting curve of hydrogen (Fig. 1a shows the high pressure capillary in *A*) we therefore used *Pt* 64, which is about two times shorter than *Pt* 24, and calibrated the first against the latter.

We render our cordial thanks to Mr. G. J. FLIM, chief of the technical staff, for his intelligent help in the construction of the cryostat, and to W. L. NEUTEBOOM, technician 1st class at the cryogenic laboratory, for his valuable aid in the experiments.

¹⁾ In order to reduce heat transfer to the vessel *A* one could still evacuate this glass. For our experiments this was not necessary.

Physics. — *Die Umwandlung flüssiges Helium I - flüssiges Helium II unter Druck.* Von W. H. KEESOM und K. CLUSIUS. (Communication N^o. 216b from the Physical Laboratory at Leiden.)

(Communicated in the Meeting of May 30, 1931).

§ 1. *Einleitung.* Eine nähere Betrachtung der Verhältnisse bei der Umwandlung flüssiges Helium I - flüssiges Helium II unter Berücksichtigung der Dichteverhältnisse dieser beiden Zustände legt die Vermutung nahe, dass diese Umwandlung durch Anwendung von Druck nach tieferen Temperaturen verschoben werden muss¹⁾. Offenbar liegen ja hier insofern ähnliche Verhältnisse wie beim System Eis-Wasser vor, als auch beim flüssigen Helium der bei höheren Temperaturen vorhandene Zustand der dichtere ist. Das Vorhandensein einer solchen Existenzlinie zwischen Schmelzkurve und Dampfdruckkurve wurde auch durch eine aufmerksame Betrachtung der Schmelzkurve nahegelegt²⁾. In der Gegend von etwa 1.75° K. erfährt diese eine auffällige Umbiegung, die hauptsächlich wohl von einer Änderung der Schmelzwärme herzurühren scheint, da nach visueller Beobachtung eine grosse Verschiedenheit der Dichte des flüssigen und festen Heliums nicht vorhanden ist.

Die Ausführung von Messungen über die spezifischen Wärmen des flüssigen Heliums gab uns die Gelegenheit neue Daten bezüglich der obengenannten Existenzlinie zu gewinnen. Tatsächlich war das dabei verwendete Kalorimeter derart konstruiert, dass das sich darin befindende flüssige Helium unter Druck bis zu etwa 25 Atm., gebracht werden konnte, damit es möglich sein würde um die spezifische Wärme des flüssigen Heliums unter Druck zu messen.

Eine Reihe von Messungen von C_s , der spezifischen Wärme des flüssigen Heliums im Sättigungszustand, sowie einige Messungen von C_v bei diesen niedrigen Drucken, sind schon gemacht worden. Die Diskussion dieser Messungen ist aber noch nicht abgeschlossen. Es hat sich dabei die Frage in den Vordergrund gestellt, ob die Umwandlung fl. He I - fl. He II tatsächlich bei einer ganz bestimmten Temperatur vorgeht, oder ob dieselbe sich über ein gewisses endliches Temperaturgebiet abspielt. Wir hoffen über die Resultate jener Messungen demnächst zu berichten, und werden dann auch die Apparatur ausführlicher beschreiben.

Indessen steht schon wohl fest, dass die Kurve, welche die für eine

1) Vergl. auch W. H. KEESOM, Nature 122, 847, 1928.

2) W. H. KEESOM, These Proceedings 29, 1136, 1926, und 30, 952, 1927. Leiden Comm. N^o. 184b und Suppl. No. 61b.

bestimmte kleine Temperaturerhöhung benötigte Warmezufuhr als Funktion der Temperatur darstellt, an einem bestimmten Punkt, $2,19^{\circ}\text{K}$. für die Messungen unter Sättigungsdruck, eine äusserst scharfe Spitze besitzt. Indem wir die Frage ob die Umwandlung schroff oder in einem kleinen Temperaturintervall stattfindet, vorläufig noch offen lassen können wir jedenfalls behaupten, dass die Umwandlung bei einer bestimmten Temperatur ein sehr ausgeprägtes Maximum¹⁾ durchläuft.

Wir werden uns in dieser Mitteilung damit beschäftigen wie sich die Temperatur dieses Umwandlungsmaximums bei höheren Drucken verschiebt, unabhängig davon ob dieselbe als eine singuläre (die Umwandlungstemperatur bei schroffem Übergang) zu betrachten ist oder nicht (wie das der Fall ist falls die Umwandlung in einem endlichen Temperaturintervall stattfindet).

§ 2. Wir konnten die in § 1 genannte Apparatur in einfacher Weise verwenden, um die Umwandlung fl. He I - fl. He II unter Druck zu studieren. Es wurden dazu Abkühlungskurven aufgenommen, während das Kalorimetergefäss mit flüssigem Helium gefüllt war, das Heliumbad im Kryostat auf eine bestimmte Temperatur unterhalb des Umwandlungspunktes gebracht und da konstant gehalten, und im Vakuumraum etwas Heliumgas für die Wärmeübertragung eingelassen war.

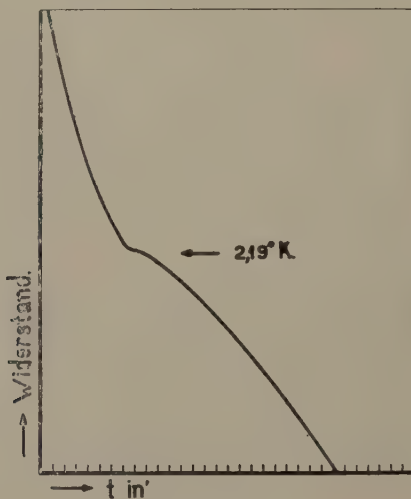


Fig. 1.

In Fig. 1 ist eine der Abkühlungskurven aufgetragen, die erhalten wurden bei den Experimenten bei denen das Helium sich unter Sättigungsdruck befand. Als Ordinate ist der Widerstand des Phosphor-

¹⁾ Maximum der Ableitung der inneren Energie oder der Enthalpie nach der Temperatur.

bronzethermometers¹⁾ und als Abszisse die Zeit herangezogen. Die Kurve stimmt ihrem Charakter nach mit den früher publizierten Erwärmungskurven²⁾ völlig überein. Auf den ersten Abfall folgt nach einer un-

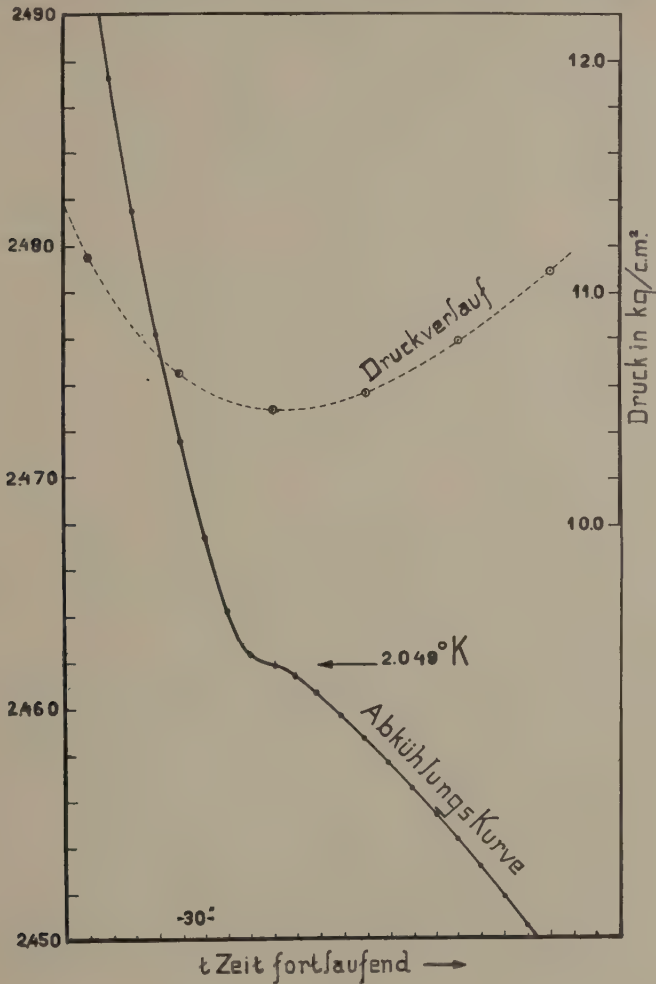


Fig. 2.

scharfen Umbiegung ein kurzes, fast horizontales Stück und ein erneuter schwächerer Abfall, der nach tieferen Temperaturen zu wieder steiler wird. Die Lage des Wendepunktes war stets exakt 2.19° K. und stimmte mit der Temperatur des Umwandlungsmaximums genau überein.

¹⁾ W. H. KEESOM und J. N. VAN DEN ENDE. These Proceedings 32, 1171, 1929; Leiden Comm. N^o. 203c.

²⁾ Vergl. z. B. W. H. KEESOM, S. WEBER und G. NØRGAARD. These Proceedings 32, 864, 1929, Leiden Comm. N^o. 202b, und W. H. KEESOM und M. WOLFKE. These Proceedings 31, 90, 1927, Leiden Comm. N^o. 190b.

Behufs der Beobachtung der Umwandlung im komprimierten flüssigen Helium wurde das flüssige Helium mittels Heliumgas unter Druck gebracht,

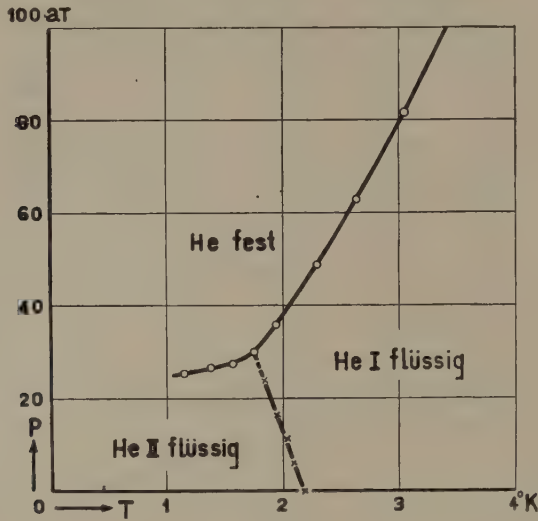


Fig. 3.

und dann die Zufuhr mittels eines Hahnes abgeschlossen. Der Druck konnte an einem Metallfeder-manometer abgelesen werden. Während der Abkühlung wurde auch die zeitliche Änderung dieses Druckes genau festgestellt. Da die Dichte des Heliums am Umwandlungsmaximum ebenfalls ein Maximum hat, muss die Druck-Zeitkurve hier ein Minimum aufweisen, Theoretisch sollte man erwarten, dass dieses Minimum mit der vom Widerstandsthermometer angezeigten Haltetemperatur zeitlich exakt übereinstimmen würde. Praktisch mussten wir aber feststellen, dass das Druckminimum etwas eher als das zugehörige horizontale Stück der Abkühlungskurve erreicht wird (s. Fig. 2). Diese Diskrepanz erklärt sich einfach durch die verhältnismässig schlechte Wärmeleitfähigkeit des flüssigen Heliums, die bewirkt, dass vom Thermometer entferntere Teile der Flüssigkeit bereits den Hauptteil der Umwandlung durchlaufen haben und schon wieder kleinere Dichte zeigen, während in seiner Nähe noch die dem Umwandlungsmaximum entsprechenden Verhältnisse vorherrschen. Die dadurch bedingte Unsicherheit dürfte jedoch wegen der Flachheit des Minimums nur geringfügig sein.

§ 3. Die Ergebnisse sind in der nachfolgenden Tabelle I wiedergegeben und mit den Schmelzdruckdaten in Fig. 3 vereinigt¹⁾. Das Maxi-

¹⁾ Die Temperaturwerte für die Schmelzdrucke wurden nach W. H. KEESOM, S. WEBER, NØRGAARD und SCHMIDT, these Proceedings 32, 864, 1314, 1929, Leiden Comm. Nos. 202b, 202c korrigiert.

mum der Umwandlung, das auf allen Abkühlungskurven deutlich zu sehen ist, verschiebt sich also in der Tat nach tieferen Temperaturen zu und würde die Schmelzdruckkurve bei 30.0 at und 1.75° K. etwa treffen. Es

TABELLE I.

Abhängigkeit der Temperatur des Umwandlungsmaximums von flüssigem Helium vom Druck. Messungen vom 18. Dez. 1930.	
p At	$T_{Umw.}$ $^{\circ}$ K.
0.050 ^{9 1)}	2.19 ⁰
6.39	2.10 ⁶
11.13	2.04 ⁹
16.09	1.97 ³
23.60	1.86 ⁰
Nach linearer Extrapolation schneidet die Umwandlungskurve die Schmelzdruckkurve bei 30.0 At und etwa 1.75° K.	

kann nach den vorliegenden Resultaten wohl kaum zweifelhaft sein, dass die Umwandlungslinie ein Gebiet für das flüssige Helium abschneidet, das in seiner Ausdehnung nach hohen Temperaturen und gegen die Dampfdruckkurve zu vollständig umrandet ist.

¹⁾ Nach KEESOM, WEBER und SCHMIDT. Leiden Comm. N^o. 202c.

Physics. — *Excitation of the secondary and the Balmer spectrum of Hydrogen by electronic impact in molecular Hydrogen and by protons of high velocity.* By L. S. ORNSTEIN, A. A. KRUIHOF and W. A. M. DEKKERS. (Communication from the Physical Laboratory of the University Utrecht).

(Communicated at the meeting of May 30, 1931.)

A study of the excitation of the secondary spectrum of Hydrogen is of importance in view of the classification of this band spectrum. The normal state of the molecule is a singlet state, therefore the way in which the excitation function of singlet and triplet bands depends on the velocity of the electrons could help to decide which bands are of one or the other type. The intensity of the Balmerlines excited in molecular hydrogen as a function of electronic velocity can furnish material for the knowledge of the type of the excitation.

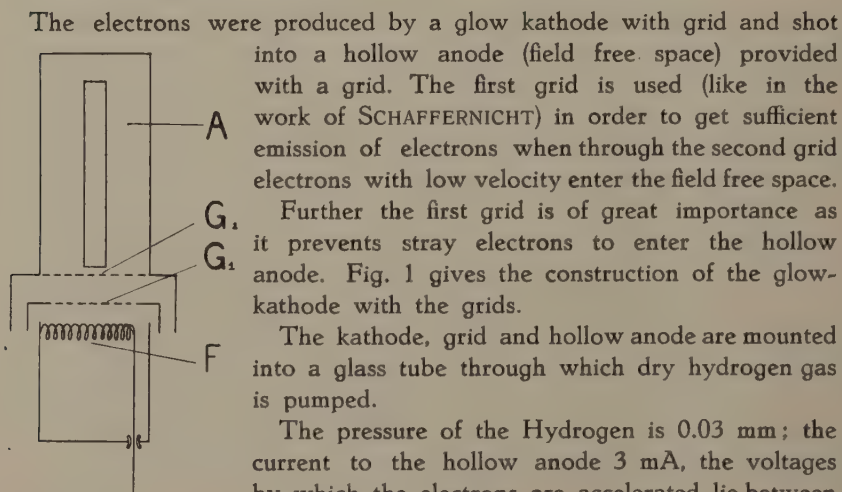


FIG. 1

- A Hollow anode with slit.
F Filament.
G₁ First grid.
G₂ Second grid.

Further the first grid is of great importance as it prevents stray electrons to enter the hollow anode. Fig. 1 gives the construction of the glow-kathode with the grids.

The kathode, grid and hollow anode are mounted into a glass tube through which dry hydrogen gas is pumped.

The pressure of the Hydrogen is 0.03 mm; the current to the hollow anode 3 mA, the voltages by which the electrons are accelerated lie between 18 and 50 V.

The spectrum was photographed with a two prism spectrograph of high intensity and dispersion. Density marks were taken in the usual way; the plate sensitivity is eliminated with the help of a calibrated tungsten lamp. We have measured the following band lines Notation of MECKE (tables 1 and 2) and further H_{β} , H_{γ} and H_{δ} .

TABLE 1. Triplet bands.

Wavelength	Band system	branch	m	n'	n''	Wavelength	Band system	branch	m	n'	n''
4024.73	γ	Q	1	0	0	4554.15	β	Q	1	1	1
4159.30	β	Q	1	2	1	4562.22	β	Q	3	1	1
4490.45	β	Q	1	0	0	4617.54	β	Q	1	2	2

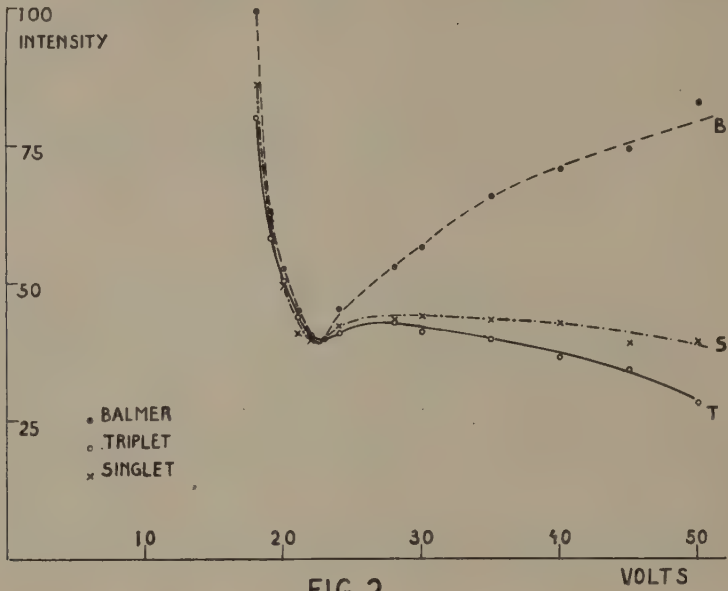
TABLE 2. Singlet bands.

Wavelength	Band system	branch	m	n'	n''	Wavelength	Band system	branch	m	n'	n''
3990.03	A	Q ₁	2	3	2	4199.79	A	R ₂	1	1	0
3997.14	A	R ₂	2	3	2	4205.10	A	R ₂	2	1	0
4043.57	C	P	4	2	0	4210.13	A	R ₂	3	1	0
4082.38	A	R ₂	1	2	1	4212.50	A	R ₂	4	1	0
4087.76	A	R ₂	2	2	1	4568.13	A	P ₀	4	0	0
4171.31	A	Q ₁	4	1	0	4572.71	A	Q ₁	4	0	0
4175.17	A	Q ₁	3	1	0	4575.88	A	P ₀	3	0	0
4177.13	A	Q ₁	2	1	0	4579.99	A	Q ₁	2	0	0
4182.17	A	P ₀	2	1	0	4582.59	A	P ₀	2	0	0
4195.67	A	R ₂	0	1	0	4627.99	A	R ₂	0	0	0

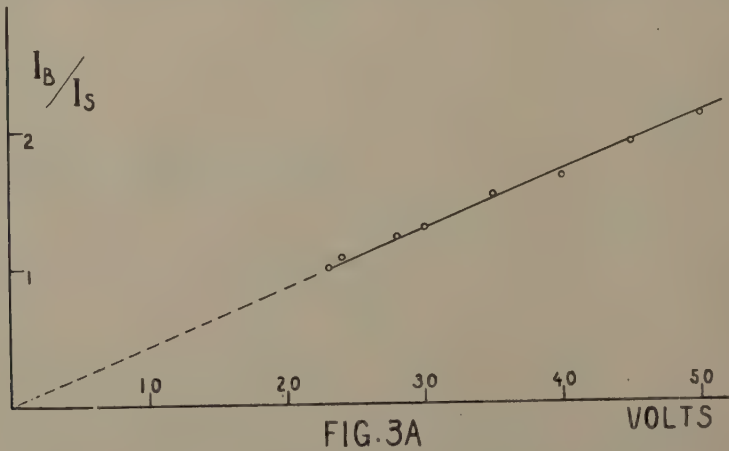
If we draw the excitation curves — intensity of the lines as function of the voltage — the ordinates are proportional for the lines of the two groups of bands separately and for the Balmer-lines. In fig. 2 the mean curves for singlet and triplet lines in the secondary spectrum and for the Balmer-lines are given. We have reduced the curves at the same value for 23 Volt. The singlet lines under consideration are much stronger than the triplet lines.

The curves consist of two parts of very different behaviour: between 18 and 22 Volts there is a strong drop of the intensity with rising voltage but the curves coincide. Above 23 Volts they show a very different feature. Comparing in this part *S* and *T* curve we find the same form of the curves as was found for the Helium singlet and triplet lines. The excitation of the triplet is diminishing more rapidly than that of the singlet so that our results give a confirmation of RICHARDSON's classification compared with the former classification of MECKE.

Now we can compare the excitation curve for the Balmer-lines with that of the singlet bands taking the ratio at corresponding velocities.



Plotting this ratio against the voltage we find a straight line passing through the origin, so that we find that the ratio of Balmer and singlet



lines I_B/I_S can be represented for the region between 24 and 50 V. by an equation of the form

$$I_B/I_S = AV.$$

If we do the same with the triplet lines we get a strongly curved line.

Now it is interesting to compare the excitation function of the Balmer lines in molecular Hydrogen with the excitation curve found by ORNSTEIN and LINDEMAN for atomic Hydrogen. Plotting the ratio (fig. 3 B) of the

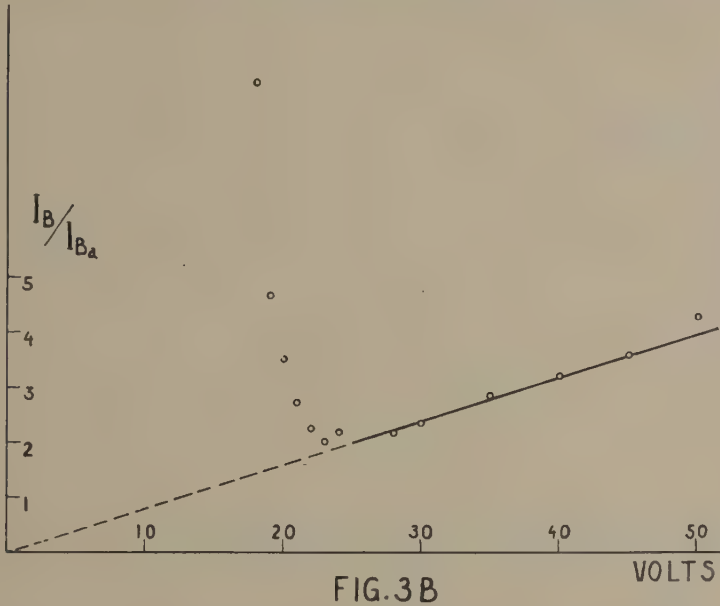


FIG.3B

intensities we find again a straight line through the origin, so that the ratio of the Intensity for Balmer lines in molecular Hydrogen I_B to the Intensity for those lines in atomic Hydrogen I_{B_a} can be represented by:

$$\frac{I_B}{I_{B_a}} = BV.$$

It seems therefore that the excitation function of atomic Hydrogen and that for Singlet-Singlet transitions in molecular Hydrogen is about the same in the Voltage region under consideration.

It will be very interesting to investigate whether this simple relation holds through a larger field of velocities and to consider the way in which I_S and I_B depend on the current to the field free space. We could understand the result if the excitation of the atomic spectrum in molecular Hydrogen goes in two steps, the excitation of molecules to a proton, an electron and an atom (possibly for a part excited) and to excited molecule in singlet state, the proportion of the first being proportional to the electronic energy. But it is perhaps better not to speculate about this point before further measurements are available. If we extrapolate the V law for I_B/I_{B_a} we get the curve of fig. 4. Subtracting the part which in this way has to be ascribed to atoms we find a

resulting excitation curve between 18 and 24 Volt. which still ought to be discussed.

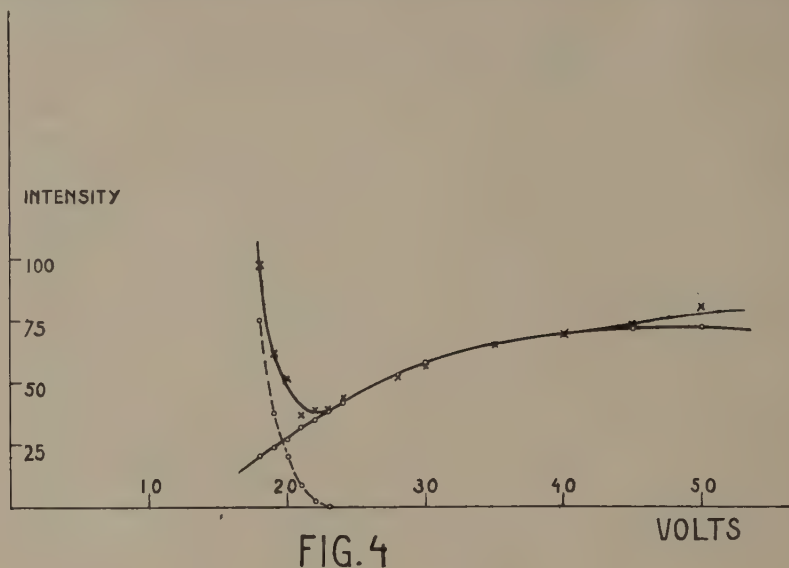


FIG.4

There are strong reasons to ascribe this part of the excitation to protons which are formed between the first grid and the second and which escape to the hollow anode. There is the more reason to do it as still some light is seen in the field free space when there is no field between the grids. The fact that the intensity is stronger for lower electronic velocity could be interpreted such that for low electronic velocities the protonic velocities are higher or that the number of protons is changed so that the left component of the excitation curve represents a disturbed protonic excitation function.

In order to have some control of this hypothesis we changed the potentials in such a way that protons of velocities between 50 and 70 V. entered the field free space and we found now a very strong excitation of S and T bands and also of the Balmer-lines. The proportion of the Balmer-lines for electronic and for protonic excitation was measured and compared. It amounts for both to: $H_{\beta} : H_{\gamma} : H_{\delta} = 13 : 3.1 : 1$. The results confirm that the first part of the curve must be ascribed to the impact of protons. In short we hope also to investigate further the excitation function for protons of known velocity in a larger region.

Utrecht, May 1931.

Mathematics. — *Ueber den kleinsten Wert einiger quadratischer Formen.* I. Von J. G. VAN DER CORPUT und J. POPKEN.

(Communicated at the meeting of May 30, 1931.)

Der erste Verfasser hat in einer Abhandlung: „Over eenige determinanten“¹⁾, die hier stets als O. e. d. zitiert werden wird, den Wert einer grossen Anzahl von Determinanten angegeben.

Das Ziel des vorliegenden Aufsatzes ist jetzt mittels dieser Resultate den kleinsten Wert gewisser quadratischer Formen

$$\sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m e_{rs} u_r u_s$$

herzuleiten, wenn hierin u_m festgehalten wird.

Wir erwähnen hier nur die folgenden Beispiele:

In Satz 3 wird für $\alpha > -2$ bewiesen

$$\sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \Gamma(\alpha + r + s) u_r u_s \equiv (m-1)! \Gamma(\alpha + 1 + m) u_m^2.$$

Als Korollar dieses Satzes geben wir in (31) die Ungleichung

$$\sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \binom{r+s-2}{r-1} u_r u_s \equiv u_m^2.$$

Satz 5 besagt, dass für jedes nicht ganze $\alpha < 2$

$$\sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \frac{u_r u_s}{\Gamma(\alpha - r - s)} \equiv \text{oder} \equiv (-1)^{m-1} \frac{(m-1)!}{\Gamma(\alpha - 1 - m)} u_m^2$$

gilt, je nachdem $[a]$ gerade oder ungerade ist²⁾.

Folgerung 1 von Satz 10 in Mitteilung II enthält für $\beta > 0$, $\alpha - \beta > 2m - 1$ die Beziehung

$$\sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \frac{u_r u_s}{\binom{\alpha - r - s}{\beta}} \equiv \frac{\beta}{\beta - 1 + m} \frac{u_m^2}{\binom{\alpha - 1 - m}{\beta - 1 + m} \binom{\alpha - \beta - m}{m - 1}}.$$

In der zweiten Mitteilung kommt auch vor

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} \left(\sum_{\mu=1}^m u_{\mu} x^{\mu-1} \right)^2 dx \equiv (m-1)! \Gamma(\alpha - 1 + m) u_m^2,$$

¹⁾ Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Afdeling Natuurkunde (eerste sectie), Deel XIV, N^o. 3 (1930).

²⁾ Mit $[a]$ bezeichnet man die grösste ganze Zahl $\equiv a$.

falls α positiv ist, und

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \left(\sum_{\mu=1}^m u_{\mu} x^{\mu-1} \right)^2 dx \equiv \\ \equiv \frac{(m-1)! \Gamma(\beta-1+m) \Gamma(\alpha-1+m)}{\Gamma(\alpha+\beta-2+2m)} u_m^2 \prod_{r=1}^{m-1} \frac{1}{\alpha+\beta-3+m+r},$$

falls α und β positive Zahlen sind.

Anwendung der bekannten CAUCHYSchen Determinante gibt in der dritten Mitteilung für $\alpha > -2$

$$\sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \frac{u_r u_s}{\alpha+r+s} \equiv \frac{\{(m-1)!\}^2}{(a+2m) \prod_{r=1}^{m-1} (a+m+r)^2} u_m^2.$$

Und jetzt zur Sache.

Sind für die natürliche Zahl n die Grössen e_{rs} ($r=1, 2, \dots, n$, $s=1, 2, \dots, n$) reell, bezeichnet $|e_{rs}|$ die Determinante n^{ter} Ordnung

$$\begin{vmatrix} e_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & e_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & e_{nn} \end{vmatrix},$$

sind weiter y_r ($r=1, 2, \dots, n$) reelle Zahlen mit

$$Y = \prod_{1 \leq s < r \leq n} (y_r - y_s)^{-1} \cdot \dots \cdot \dots \quad (1)$$

und ist $\varphi_s(y)$ ($s=1, 2, \dots, n$) irgend ein Polynom von einem Grade $\leq n-s$, dann gilt nach O. e. d. ²⁾ folgender

Hilfssatz 1.

$$|\varphi_s(y_r) \Gamma(y_r + s)| = Y \Gamma(y_1 + 1) \dots \Gamma(y_n + 1) \varphi_1(-1) \dots \varphi_n(-n), \quad (2)$$

falls keine der Zahlen y_1, \dots, y_n negativ und ganz ist, und

$$\left| \frac{\varphi_s(y_r)}{\Gamma(y_r + 1 - s)} \right| = \frac{Y \varphi_1(1) \varphi_2(2) \dots \varphi_n(n)}{\Gamma(y_1) \Gamma(y_2) \dots \Gamma(y_n)}, \quad \dots \quad (3)$$

falls keine der Zahlen y_1, \dots, y_n ganz ≤ 0 ist.

Aus diesem Satz gehen die folgenden Hilfssätze hervor.

Hilfssatz 2. Für jedes nicht ganze α und ausserdem für jedes $\alpha > -2$ gilt, falls n eine natürliche Zahl ist,

$$|\Gamma(\alpha + r + s)| = 1/2! \dots (n-1)! \Gamma(\alpha + 2) \Gamma(\alpha + 3) \dots \Gamma(\alpha + 1 + n); \quad (4)$$

ist $\alpha > -2$, so hat man überdies

$$|\Gamma(\alpha + r + s)| > 0 \quad \dots \quad (5)$$

¹⁾ Ein leeres Produkt wird stets gleich 1 gesetzt.

²⁾ O. e. d. Satz 4, S. 10.

Beweis. Wir wenden Hilfssatz 1 an mit $\varphi_s(y) = 1$ und $y_r = \alpha + r$. Aus (1) folgt dann

$$Y = 1! 2! \dots (n-1)!,$$

während nach den Voraussetzungen des zu beweisenden Satzes y_1, \dots, y_n nicht negativ ganz sind. Wegen Formel (2) von Hilfssatz 1 gilt also (4).

Ist $\alpha > -2$, so folgt (5) sofort aus (4).

Hilfssatz 3. Setzt man für jedes nicht ganze α

$$D_0 = 1, D_n = \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha - r - s)} \right| \quad (n = 1, 2, \dots),$$

so ist

$$D_n = \frac{(-1)^{1/2 n(n-1)} 1! 2! \dots (n-1)!}{\Gamma(\alpha - 2) \Gamma(\alpha - 3) \dots \Gamma(\alpha - 1 - n)} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (6)$$

und

$$\frac{D_n}{D_{n-1}} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{\Gamma(\alpha - 1 - n)} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (7)$$

Ist ausserdem $\alpha < 2$, so gilt

$$D_n > 0 \quad \text{oder} \quad (-1)^n D_n > 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (8)$$

je nachdem $[a]$ gerade oder ungerade ist.

Beweis. Beziehung (6) folgt aus Formel (3) von Hilfssatz 1, mit

$$\varphi_s(y) = 1, \quad y_r = \alpha - 1 - r \quad \text{und} \quad Y = (-1)^{1/2 n(n-1)} 1! 2! \dots (n-1)!$$

angewendet. Formel (7) folgt aus (6) wegen $D_0 = 1$.

Ist $\alpha < 2$, so ist die rechte Seite von (7) positiv oder negativ, je nachdem $[a]$ gerade oder ungerade ist. Mit Rücksicht auf $D_0 = 1 > 0$ folgt hieraus (8).

Hilfssatz 4. Fällt α mit keiner ganzen Zahl ≤ -2 , und fällt β mit keiner ganzen Zahl ≤ 2 zusammen, wird $D_0 = 1$, und wird für jedes positive ganze n mit der Eigenschaft, dass $2n + 1 - \beta$ keine natürliche Zahl ist,

$$D_n = |\Gamma(\alpha + r + s) \Gamma(\beta - r - s)|$$

gesetzt, dann ist

$$D_n = \prod_{r=1}^n (r-1)! \Gamma(\alpha + 1 + r) \Gamma(\beta - n - r) \prod_{h=r+1}^n (\alpha + \beta + r - h) \quad (9)$$

und

$$\frac{D_n}{D_{n-1}} = (n-1)! \Gamma(\alpha + 1 + n) \Gamma(\beta - 2n) \prod_{r=1}^{n-1} \frac{\alpha + \beta - r}{\beta - n - r} \quad (10)$$

Hilfssatz 5. Wird für nicht ganzes $\alpha < \frac{1}{2}$

$$D_0 = 1, \quad D_n = |\Gamma(\alpha + r - s) \Gamma(\alpha - r + s)|$$

gesetzt, dann ist

$$\frac{D_n}{D_{n-1}} = (-1)^{n-1} (n-1)! \Gamma^2(\alpha + 1 - n) \prod_{r=1}^{n-1} (2\alpha - r) \quad . \quad (13)$$

und

$$D_n > 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} D_n &= |\Gamma(\alpha + r - s) \Gamma(\alpha - r + s)| \\ &= (-1)^{1/2 n(n-1)} |\Gamma(\alpha + r - (n - s + 1)) \Gamma(\alpha - r + (n - s + 1))| \\ &= (-1)^{1/2 n(n-1)} |\Gamma(\alpha - n - 1 + r + s) \Gamma(\alpha + n + 1 - r - s)|. \end{aligned}$$

Da α nicht ganz ist, darf man Hilfssatz 4 mit $\alpha - n - 1$ statt α , und mit $\alpha + n + 1$ statt β anwenden. Aus (9) folgt dann

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{1/2 n(n-1)} \prod_{r=1}^n (r-1)! \Gamma(\alpha - n + r) \Gamma(\alpha + 1 - r) \prod_{h=r+1}^n (2\alpha + r - h) = \\ &= \prod_{r=1}^n (-1)^{r-1} (r-1)! \Gamma^2(\alpha + 1 - r) \prod_{h=r+1}^n (2\alpha + r - h). \end{aligned}$$

Wegen

$$\prod_{r=1}^n \prod_{h=r+1}^n (2\alpha + r - h) = \prod_{r=1}^{n-1} (2\alpha + r - n) \prod_{r=1}^{n-1} \prod_{h=r+1}^{n-1} (2\alpha + r - h)$$

folgt hieraus

$$\frac{D_n}{D_{n-1}} = (-1)^{n-1} (n-1)! \Gamma^2(\alpha + 1 - n) \prod_{r=1}^{n-1} (2\alpha + r - n);$$

man beachte hierbei, dass $D_0 = 1$ ist. Hiermit ist (13) bewiesen.

Aus (13) folgt wegen $\alpha < \frac{1}{2}$

$$\frac{D_n}{D_{n-1}} > 0;$$

wegen $D_0 = 1 > 0$ gilt somit (14).

Hiermit ist Alles bewiesen.

Hilfssatz 6. Wird für $\beta > \alpha > -2$

$$D_0 = 1, \quad D_n = \left| \frac{\Gamma(\alpha + r + s)}{\Gamma(\beta + r + s)} \right| \quad (n = 1, 2, \dots),$$

gesetzt, dann ist für $n = 1, 2, \dots$

$$D_n = \prod_{r=1}^n \frac{(r-1)! \Gamma(\alpha + 1 + r)}{\Gamma(\beta + n + r)} \prod_{h=r+1}^n (\beta - \alpha - 1 - r + h), \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

$$\frac{D_n}{D_{n-1}} = \frac{(n-1)! \Gamma(\alpha + 1 + n)}{\Gamma(\beta + 2n)} \prod_{r=1}^{n-1} \frac{\beta - \alpha - 1 + r}{\beta - 1 + n + r} \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

und

$$D_n > 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Beweis ¹⁾. Setzt man in Hilfssatz 1

$$y_r = a + r, \quad Y = 1! 2! \dots (n-1)!$$

und ersetzt man $\varphi_s(y)$ durch $\varphi_s(y-a)$, so bekommt man nach Formel (2) und wegen $a > -2$

$$|\varphi_s(r) \Gamma(a+r+s)| = 1! 2! \dots (n-1)! \Gamma(a+2) \dots \Gamma(a+1+n) \cdot \varphi_1(-a-1) \dots \varphi_n(-a-n),$$

also, da $\beta > -2$ ist,

$$\left| \frac{\varphi_s(r) \Gamma(a+r+s)}{\Gamma(\beta+r+n)} \right| = \prod_{r=1}^n \frac{(r-1)! \Gamma(a+1+r) \varphi_r(-a-r)}{\Gamma(\beta+n+r)}.$$

Setzt man hierin

$$\varphi_s(y) = \prod_{h=s+1}^n (\beta-1+y+h) \quad (s=1, 2, \dots, n),$$

sodass $\varphi_s(y)$ ein Polynom $(n-s)$ ten Grades ist, dann hat man also

$$\left| \frac{\Gamma(a+r+s)}{\Gamma(\beta+r+s)} \right| = \prod_{r=1}^n \frac{(r-1)! \Gamma(a+1+r)}{\Gamma(\beta+n+r)} \prod_{h=r+1}^n (\beta-a-1-r+h),$$

womit (15) bewiesen ist.

Es ist

$$\prod_{r=1}^n \Gamma(\beta+n+r) = \Gamma(\beta+2n) \prod_{r=1}^{n-1} (\beta-1+n+r) \prod_{r=1}^{n-1} \Gamma(\beta+(n-1)+r)$$

und

$$\prod_{r=1}^n \prod_{h=r+1}^n (\beta-a-1-r+h) = \prod_{r=1}^{n-1} (\beta-a-1-r+n) \prod_{r=1}^{n-1} \prod_{h=r+1}^n (\beta-a-1-r+h).$$

Aus (15) folgt deshalb

$$\frac{D_n}{D_{n-1}} = \frac{(n-1)! \Gamma(a+1+n)}{\Gamma(\beta+2n) \prod_{r=1}^{n-1} (\beta-1+n+r)} \prod_{r=1}^{n-1} (\beta-a-1-r+n),$$

womit (16) bewiesen ist.

Wegen $\beta > a > -2$, folgt (17) sofort aus (15).

Hilfssatz 6 ist hiermit bewiesen.

Hilfssatz 7. Fällt a mit keiner ganzen Zahl ≤ -2 , und fällt β mit keiner ganzen Zahl ≤ 2 zusammen, wird $D_0 = 1$, und wird für jedes positive ganze n mit der Eigenschaft, dass $n+2-\beta$ keine natürliche Zahl ist,

$$D_n = \left| \frac{1}{\Gamma(a+r+s) \Gamma(\beta-r-s)} \right|$$

¹⁾ Man vergl. O. e. d. Satz 4, Bemerkung 2, S. 11 und 12.

gesetzt, dann ist

$$D_n = (-1)^{1/2 n(n-1)} \prod_{r=1}^n \frac{(r-1)! \prod_{h=r+1}^n (a+\beta-2-r+h)}{\Gamma(\beta-1-r) \Gamma(a+n+r)} \quad . \quad . \quad (18)$$

und

$$\frac{D_n}{D_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{\Gamma(\beta-1-n) \Gamma(a+2n)} \prod_{r=1}^{n-1} \frac{a+\beta-2+r}{a-1+n+r} \quad . \quad . \quad (19)$$

Ist β nicht ganz, $\beta < 2$ und $a + \beta > 1$, so gilt für jedes positive ganze n

$$D_n > 0 \quad \text{oder} \quad (-1)^n D_n > 0, \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

je nachdem $[\beta]$ gerade oder ungerade ist.

Beweis ¹⁾. Man setze in Hilfssatz 1

$$y_r = \beta - 1 - r \quad \text{und} \quad Y = (-1)^{\frac{1}{2} n(n-1)} 1! 2! \dots (n-1)!$$

und ersetze $\varphi_s(y)$ durch $\varphi_s(\beta - 1 - y)$ ($s = 1, 2, \dots, n$). Da β nicht ganz $\equiv 1 + n$ ist, ist keine der Zahlen y_1, y_2, \dots, y_n ganz $\equiv 0$; nach Formel (3) hat man nun

$$\left| \frac{\varphi_s(r)}{\Gamma(\beta-r-s)} \right| = (-1)^{1/2 n(n-1)} 1! 2! \dots (n-1)! \prod_{r=1}^n \frac{\varphi_r(\beta-1-r)}{\Gamma(\beta-1-r)},$$

also, da die Zahlen $a + n + r$ ($r = 1, 2, \dots, n$) nicht ganz $\equiv 0$ sind,

$$\left| \frac{\varphi_s(r)}{\Gamma(a+n+r) \Gamma(\beta-r-s)} \right| = (-1)^{1/2 n(n-1)} 1! 2! \dots (n-1)! \prod_{r=1}^n \frac{\varphi_r(\beta-1-r)}{\Gamma(a+n+r) \Gamma(\beta-1-r)}.$$

Wird hierin

$$\varphi_s(y) = \prod_{h=s+1}^n (a-1+y+h) \quad (s = 1, 2, \dots, n)$$

gesetzt (also ist $\varphi_s(y)$ ein Polynom $(n-s)$ ten Grades), so bekommt man

$$\left| \frac{1}{\Gamma(a+r+s) \Gamma(\beta-r-s)} \right| = (-1)^{1/2 n(n-1)} \prod_{r=1}^n \frac{(r-1)! \prod_{h=r+1}^n (a+\beta-2-r+h)}{\Gamma(a+n+r) \Gamma(\beta-1-r)},$$

womit (18) bewiesen ist.

Nun ist

$$\prod_{r=1}^n \Gamma(a+n+r) = \Gamma(a+2n) \prod_{r=1}^{n-1} (a-1+n+r) \prod_{r=1}^{n-1} \Gamma(a+(n-1)+r)$$

und

$$\prod_{r=1}^n \prod_{h=r+1}^n (a+\beta-2-r+h) = \prod_{r=1}^{n-1} (a+\beta-2-r+n) \prod_{r=1}^{n-1} \prod_{h=r+1}^{n-1} (a+\beta-2-r+h),$$

¹⁾ Man vergl. O. e. d. Satz 4, Bemerkung 2, S. 12.

sodass aus (18) folgt

$$\frac{D_n}{D_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot \prod_{r=1}^{n-1} (a+\beta-2-r+n)}{\Gamma(\beta-1-n) \cdot \Gamma(a+2n) \prod_{r=1}^{n-1} (a-1+n+r)},$$

womit (19) abgeleitet worden ist.

Falls $\beta < 2$ und $a + \beta > 1$ ist, folgt aus (19)

$$\frac{D_n}{D_{n-1}} > \text{oder} < 0,$$

je nachdem $[\beta]$ gerade oder ungerade ist; mit Rücksicht auf $D_0 = 1 > 0$ folgt (20). Hiermit ist Hilfssatz 7 völlig bewiesen.

Hilfssatz 8. Wird für nicht ganzes $a > \frac{1}{2}$ gesetzt

$$D_0 = 1, D_n = \left| \frac{1}{\Gamma(a+r-s) \Gamma(a-r+s)} \right| \quad (n = 1, 2, \dots),$$

dann ist für $n = 1, 2, \dots$

$$D_n = \prod_{r=1}^n \frac{(r-1)! \prod_{h=r+1}^n (2a-2-r+h)}{\Gamma^2(a-1+r)}, \quad \dots \quad (21)$$

$$\frac{D_n}{D_{n-1}} = \frac{(n-1)! \prod_{r=1}^{n-1} (2a-2+r)}{\Gamma^2(a-1+n)} \quad \dots \quad (22)$$

und

$$D_n > 0. \quad \dots \quad (23)$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} D_n &= \left| \frac{1}{\Gamma(a+r-s) \Gamma(a-r+s)} \right| = \\ &= (-1)^{1/2 n(n-1)} \left| \frac{1}{\Gamma(a+r-(n-s+1)) \Gamma(a-r+(n-s+1))} \right| = \\ &= (-1)^{1/2 n(n-1)} \left| \frac{1}{\Gamma(a-n-1+r+s) \Gamma(a+n+1-r-s)} \right|, \end{aligned}$$

also, da a und folglich $a-n-1$ und $a+n+1$ nicht ganz ist, gilt nach Formel (18) von Hilfssatz 7 mit $a-n-1$ statt a und $a+n+1$ statt β

$$D_n = \prod_{r=1}^n \frac{(r-1)! \prod_{h=r+1}^n (2a-2-r+h)}{\Gamma(a+n-r) \Gamma(a-1+r)},$$

womit (21) bewiesen ist.

Wegen

$$\prod_{r=1}^n \prod_{h=r+1}^n (2\alpha - 2 - r + h) = \prod_{r=1}^{n-1} (2\alpha - 2 + n - r) \prod_{r=1}^{n-1} \prod_{h=r+1}^{n-1} (2\alpha - 2 - r + h)$$

und $D_0 = 1$ folgt (22) aus (21)

Da $\alpha > \frac{1}{2}$ ist, folgt (23) aus (21).

Hiermit ist Hilfssatz 8 bewiesen.

In der Folge sei m eine natürliche Zahl. Es seien m^2 reelle Zahlen e_{rs} mit

$$e_{rs} = e_{sr} \quad (r = 1, 2, \dots, m, s = 1, 2, \dots, m)$$

gegeben. Weiter werde

$$D_0 = 1, \quad D_n = \begin{vmatrix} e_{11} & \dots & e_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & \dots & e_{nn} \end{vmatrix} \quad (n = 1, 2, \dots, m)$$

gesetzt. Die Zahlen u_r ($r = 1, 2, \dots, m$) seien beliebig reell.

Unter diesen Voraussetzungen gelten folgende Sätze.

Satz 1. Sind die Ungleichungen

$$D_1 \geq 0, D_2 \geq 0, \dots, D_{m-2} \geq 0, D_{m-1} > 0 \quad \dots \quad (24)$$

erfüllt, dann gilt

$$\sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m e_{rs} u_r u_s \geq \frac{D_m}{D_{m-1}} u_m^2 \quad \dots \quad (25)$$

Beweis. Aus (24) und

$$\begin{vmatrix} e_{11} & \dots & e_{1,m-1} & e_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ e_{m-1,1} & \dots & e_{m-1,m-1} & e_{m-1,m} \\ e_{m,1} & \dots & e_{m,m-1} & e_{m,m} - \frac{D_m}{D_{m-1}} \end{vmatrix} = 0 \quad \dots \quad (26)$$

(für den Fall mit $m = 1$ beachte man $D_0 = 1$) folgt, dass die quadratische Form

$$\sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m e_{rs} u_r u_s - \frac{D_m}{D_{m-1}} u_m^2 \quad \dots \quad (27)$$

positiv-definit ist, d. h. stets einen Wert ≥ 0 hat. Hiermit ist Satz 1 bewiesen.

Bemerkungen. 1. Ist $D_{m-1} \neq 0$ und ist (25) identisch in u_1, u_2, \dots, u_m erfüllt, so folgt umgekehrt (24).

2. Für $m = 1$ gilt in (25) das Gleichheitszeichen. Ist $m > 1$, so ist es wegen (26) und $D_{m-1} \neq 0$ möglich die reellen Zahlen u_1, u_2, \dots, u_m mit $u_m \neq 0$ derart zu wählen, dass die in (27) genannte quadratische Form

en Wert Null annimmt. Hieraus folgt, dass die rechte Seite von (25) nicht durch eine grössere von u_1, u_2, \dots, u_{m-1} unabhängige Zahl ersetzt werden kann. Eine ähnliche Bemerkung gilt für alle in dieser Mitteilung vorkommenden Ungleichungen.

Satz 2. Sind die Ungleichungen.

$$(-1)^{m-1} D_{m-1} > 0, \quad (-1)^n D_n \geq 0 \quad (n=1, 2, \dots, m-2) \dots \quad (28)$$

erfüllt, dann gilt

$$\sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m e_{rs} u_r u_s \leq \frac{D_m}{D_{m-1}} u_m^2. \quad \dots \quad (29)$$

Beweis. Dieser Satz folgt sofort aus dem vorigen, wenn man e_{rs} durch $-e_{rs}$ und D_n durch $(-1)^n D_n$ ersetzt.

Satz 3. Für $\alpha > -2$ gilt

$$\sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \Gamma(\alpha+r+s) u_r u_s \geq (m-1)! \Gamma(\alpha+1+m) u_m^2. \quad \dots \quad (30)$$

Beweis. Wegen $\alpha > -2$ folgt aus Formel (5) von Hilfssatz 2, dass die Bedingungen von Satz 1 mit

$$e_{rs} = \Gamma(\alpha+r+s) \quad (r=1, 2, \dots, m, s=1, 2, \dots, m)$$

erfüllt sind.

Formel (4) von Hilfssatz 2 ergibt noch, mit Rücksicht auf $D_0 = 1$,

$$\frac{D_m}{D_{m-1}} = (m-1)! \Gamma(\alpha+1+m).$$

Nach Anwendung von Satz 1 bekommt man somit Ungleichung (30).

*Folgerung*¹⁾. Für $\alpha > -\frac{3}{2}$ gilt

$$\sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \binom{2\alpha+r+s}{\alpha+r} u_r u_s \geq \frac{\binom{2\alpha+2m}{\alpha+m}}{\binom{2\alpha+2m}{m-1}} u_m^2.$$

Vorbemerkung. Insbesondere hat man also

$$\sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \binom{r+s-2}{r-1} u_r u_s \geq u_m^2. \quad \dots \quad (31)$$

¹⁾ Dieses folgt auch aus Satz 1 durch Anwendung von O. e. d. Satz 5, zweite Behauptung (S. 13) mit

$$\varphi_s(y) = 1, \quad c = 1, \quad y_r = r, \quad a = 2\alpha + 1, \quad b = \alpha \quad \text{und} \quad Y = 1/2! \dots (n-1)!.$$

Beweis. Wegen $\alpha > -\frac{3}{2}$ ist

$$2\alpha + 1 > -2, \alpha + 1 + r > 0 \quad (r = 1, 2, \dots, m),$$

sodass nach Satz 3 mit $2\alpha + 1$ statt α und $\frac{u_r}{\Gamma(\alpha + 1 + r)}$ statt u_r ($r = 1, 2, \dots, m$) gilt

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \frac{\Gamma(2\alpha + 1 + r + s)}{\Gamma(\alpha + 1 + r) \Gamma(\alpha + 1 + s)} u_r u_s &\equiv (m-1)! \Gamma(2\alpha + 2 + m) \frac{u_m^2}{\Gamma^2(\alpha + 1 + m)} = \\ &= \frac{\Gamma(m) \Gamma(2\alpha + 2 + m) \Gamma(2\alpha + 1 + 2m)}{\Gamma(2\alpha + 1 + 2m) \Gamma^2(\alpha + 1 + m)} u_m^2, \end{aligned}$$

womit die Folgerung bewiesen ist.

Satz 4. Für $\alpha > 2m - 2$, $\alpha \neq 2m - 1$ und $\alpha \neq 2m$ ist

$$\sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \Gamma(\alpha - r - s) u_r u_s \equiv \frac{(m-1)! \Gamma(\alpha - 2m) \Gamma(\alpha + 1 - 2m)}{\Gamma(\alpha - m)} u_m^2. \quad (32)$$

Beweis. Wird

$$e_{rs} = \Gamma(\alpha - r - s) \quad (r = 1, 2, \dots, m, s = 1, 2, \dots, m)$$

gesetzt, so ist $e_{rs} = e_{sr}$ und

$$\begin{aligned} D_n = |\Gamma(\alpha - r - s)| &= |\Gamma(\alpha - (n - r + 1) - (n - s + 1))| = \left\{ \begin{array}{l} (n=1, 2, \dots, m). \end{array} \right. \quad (33) \\ &= |\Gamma(\alpha - 2 - 2n + r + s)| \end{aligned}$$

Aus den Voraussetzungen des zu beweisenden Satzes folgt, dass

$$\alpha - 2 - 2n > -2 \quad (n = 1, 2, \dots, m-1) \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

gilt, und weiter, dass $\alpha - 2 - 2m > -2$ oder nicht ganz ist.

Wenden wir deshalb Hilfssatz 2 an mit $\alpha - 2 - 2n$ statt α ($n = 1, 2, \dots, m$), so folgt aus (4), mit Rücksicht auf (33),

$$D_n = 1! 2! \dots (n-1)! \Gamma(\alpha - 2n) \Gamma(\alpha + 1 - 2n) \dots \Gamma(\alpha - 1 - n) \quad (n = 1, 2, \dots, m); \quad (35)$$

während, wegen (34), aus (5) von Hilfssatz 2 folgt

$$D_n > 0 \quad (n = 1, 2, \dots, m-1).$$

Die Bedingungen von Satz 1 sind also erfüllt. Aus (35) folgt

$$\frac{D_m}{D_{m-1}} = \frac{(m-1)! \Gamma(\alpha - 2m) \Gamma(\alpha + 1 - 2m)}{\Gamma(\alpha - m)},$$

sodass aus Satz 1 die Gültigkeit von Ungleichung (32) folgt.

Folgerung. Für $\alpha > m - \frac{3}{2}$, $\alpha \neq m - 1$ und $\alpha \neq m - \frac{1}{2}$ ist

$$\sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \binom{2\alpha - r - s}{\alpha - r} u_r u_s \equiv \frac{\binom{2\alpha - 2m}{\alpha - m}}{\binom{2\alpha - m}{m-1}} u_m^2 \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt $2\alpha + 1 > 2m - 2$, $2\alpha + 1 \neq 2m - 1$ und $2\alpha + 1 \neq 2m$; nach Satz 4 mit $2\alpha + 1$ statt α ist daher

$$\sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \Gamma(2\alpha+1-r-s) u_r u_s \equiv \frac{(m-1)! \Gamma(2\alpha+1-2m) \Gamma(2\alpha+2-2m)}{\Gamma(2\alpha+1-m)} u_m^2. \quad (37)$$

Wegen $\alpha > m - \frac{3}{2}$ und $\alpha \neq m - 1$ ist weiter $\Gamma(\alpha + 1 - r)$ für $r = 1, 2, \dots, m$ eine endliche Zahl, sodass aus (37) mit $\frac{u_r}{\Gamma(\alpha + 1 - r)}$ statt u_r ($r = 1, 2, \dots, m$) folgt

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \frac{\Gamma(2\alpha+1-r-s)}{\Gamma(\alpha+1-r) \Gamma(\alpha+1-s)} u_r u_s &\equiv \frac{(m-1)! \Gamma(2\alpha+1-2m) \Gamma(2\alpha+2-2m)}{\Gamma(2\alpha+1-m) \Gamma^2(\alpha+1-m)} u_m^2 = \\ &= \frac{\Gamma(m) \Gamma(2\alpha+2-2m)}{\Gamma(2\alpha+1-m)} \frac{\Gamma(2\alpha+1-2m)}{\Gamma^2(\alpha+1-m)} u_m^2, \end{aligned}$$

womit (36) bewiesen ist.

Satz 5. Für jedes nicht ganze $\alpha < 2$ gilt

$$\sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \frac{u_r u_s}{\Gamma(\alpha - r - s)} \equiv \text{oder} \equiv (-1)^{m-1} \frac{(m-1)!}{\Gamma(\alpha - 1 - m)} u_m^2, \quad (38)$$

je nachdem $[\alpha]$ gerade oder ungerade ist.

Beweis. Wird

$$e_{rs} = \frac{1}{\Gamma(\alpha + r + s)} \quad (r = 1, 2, \dots, m, s = 1, 2, \dots, m)$$

gesetzt, so ist $e_{rs} = e_{sr}$.

Nach den Voraussetzungen des zu beweisenden Satzes kann man Hilfssatz 3 anwenden. Aus Formel (8) folgt dann, dass

$$D_n > 0 \text{ oder } (-1)^n D_n > 0 \quad (n = 1, 2, \dots, m-1)$$

ist, je nachdem $[\alpha]$ gerade oder ungerade ist. Wendet man folglich Satz 1 bzw. Satz 2 an, so gelten, mit Rücksicht auf Formel (7) von Hilfssatz 3 mit $n = m$, die Ungleichungen (38).

Folgerung. Ist $2\alpha < 1$ und nicht ganz, dann gilt

$$\sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \frac{u_r u_s}{\binom{2\alpha - r - s}{\alpha - r}} \equiv \text{oder} \equiv (-1)^{m-1} \frac{u_m^2}{\binom{2\alpha - 2m}{\alpha - m} \binom{2\alpha - 1 - m}{m - 1}}, \quad (39)$$

je nachdem $[2\alpha]$ gerade oder ungerade ist.

Beweis. Nach den Voraussetzungen ist $2\alpha + 1 < 2$ und nicht ganz; auch folgt, dass α nicht ganz ist, also dass $\Gamma(\alpha + 1 - r)$ ($r = 1, 2, \dots, m$) endliche Zahlen sind.

Aus Satz 5 mit $2\alpha + 1$ statt α und $\Gamma(\alpha + 1 - r) u_r$ statt u_r ($r = 1, 2, \dots, m$) folgt, je nachdem $[2\alpha + 1]$ gerade oder ungerade ist,

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \frac{\Gamma(\alpha + 1 - r) \Gamma(\alpha + 1 - s)}{\Gamma(2\alpha + 1 - r - s)} u_r u_s &\equiv \text{oder} \equiv \\ &(-1)^{m-1} \frac{(m-1)! \Gamma^2(\alpha + 1 - m) u_m^2}{\Gamma(2\alpha - m)} = \\ &= (-1)^{m-1} \frac{\Gamma^2(\alpha + 1 - m)}{\Gamma(2\alpha + 1 - 2m)} \cdot \frac{\Gamma(2\alpha + 1 - 2m) \Gamma(m)}{\Gamma(2\alpha - m)} u_m^2, \end{aligned}$$

womit (39) bewiesen ist.

Satz 6. Für jedes nicht ganze $\alpha < 2 - 2m$ ist

$$\sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \frac{u_r u_s}{\Gamma(\alpha + r + s)} \equiv \text{oder} \equiv \frac{(-1)^{m-1} (m-1)! \Gamma(\alpha + m)}{\Gamma(\alpha + 2m) \Gamma(\alpha - 1 + 2m)} u_m^2, \quad (40)$$

je nachdem $[\alpha]$ gerade oder ungerade ist.

Beweis. Wird

$$e_{rs} = \frac{1}{\Gamma(\alpha + r + s)} \quad (r=1, 2, \dots, m, s=1, 2, \dots, m)$$

gesetzt, dann ist $e_{rs} = e_{sr}$, und

$$\begin{aligned} D_n &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha + r + s)} \right| = \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha + (n-r+1) + (n-s+1))} \right| = \left\{ \begin{aligned} &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha + 2 + 2n - r - s)} \right| \quad (n=1, 2, \dots, m) \end{aligned} \right\} \quad (41) \end{aligned}$$

Nach den Voraussetzungen des zu beweisenden Satzes ist

$$\alpha + 2 + 2n < 2 \quad (n=1, 2, \dots, m-1), \quad \dots \quad (42)$$

und ist $\alpha + 2 + 2n$ für $n=1, 2, \dots, m$ keine ganze Zahl.

Wir können folglich Hilfssatz 3 anwenden mit $\alpha + 2 + 2n$ statt α ($n=1, 2, \dots, m$). Nach (41) und (6) gilt also

$$D_n = \frac{(-1)^{1/2n(n-1)} 1! 2! \dots (n-1)!}{\Gamma(\alpha + 2n) \Gamma(\alpha - 1 + 2n) \dots \Gamma(\alpha + 1 + n)} \quad (n=1, 2, \dots, m) \quad (43)$$

Nach (8) von Hilfssatz 3 gilt, mit Rücksicht auf (42),

$$D_n > 0 \quad \text{oder} \quad (-1)^n D_n > 0 \quad (n=1, 2, \dots, m-1), \quad \dots \quad (44)$$

je nachdem $[\alpha + 2 + 2n]$, also je nachdem $[\alpha]$ gerade oder ungerade ist.

Aus (43) folgt wegen $D_0 = 1$

$$\frac{D_m}{D_{m-1}} = \frac{(-1)^{m-1} (m-1)! \Gamma(\alpha + m)}{\Gamma(\alpha + 2m) \Gamma(\alpha - 1 + 2m)} \quad \dots \quad (45)$$

Die Bedingungen von Satz 1 bzw. Satz 2 sind wegen (44) erfüllt, je nachdem $[a]$ gerade oder ungerade ist.

Die Anwendung dieser beiden Sätze ergibt wegen (45) die Ungleichungen (40).

Folgerung. Es sei $\alpha < \frac{1}{2} - m$ und 2α nicht ganz. Dann gilt

$$\sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \frac{u_r u_s}{\binom{2\alpha+r+s}{\alpha+r}} \equiv \text{oder} \equiv (-1)^{m-1} \frac{u_m^2}{\binom{2\alpha+2m}{\alpha+m} \binom{2\alpha-1+2m}{m-1}}, \quad (46)$$

je nachdem $[2\alpha]$ gerade oder ungerade ist.

Beweis. Nach den Voraussetzungen ist $2\alpha+1 < 2-2m$ und nicht ganz. Da α nicht ganz ist, sind $\Gamma(\alpha+1+r)$ ($r=1, 2, \dots, m$) endliche Zahlen.

Wenden wir Satz 6 mit $2\alpha+1$ statt α und $\Gamma(\alpha+1+r)u_r$ statt u_r ($r=1, 2, \dots, m$) an, so bekommt man, je nachdem $[2\alpha+1]$ gerade oder ungerade ist,

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \frac{\Gamma(\alpha+1+r) \Gamma(\alpha+1+s)}{\Gamma(2\alpha+1+r+s)} u_r u_s \\ \equiv \text{oder} \equiv \frac{(-1)^{m-1} (m-1)! \Gamma(2\alpha+1+m) \Gamma^2(\alpha+1+m) u_m^2}{\Gamma(2\alpha+1+2m) \Gamma(2\alpha+2m)} \\ = (-1)^{m-1} \frac{\Gamma^2(\alpha+1+m)}{\Gamma(2\alpha+1+2m)} \frac{\Gamma(m) \Gamma(2\alpha+1+m)}{\Gamma(2\alpha+2m)} u_m^2; \end{aligned}$$

hieraus folgt (46).

Satz 7. Für $\alpha > -2$ und $\beta > 2m-2$, $\beta \neq 2m-1$, $\beta \neq 2m$ gilt

$$\left. \begin{aligned} \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \Gamma(\alpha+r+s) \Gamma(\beta-r-s) u_r u_s \\ \equiv (m-1)! \Gamma(\alpha+1+m) \Gamma(\beta-2m) u_m^2 \prod_{r=1}^{m-1} \frac{\alpha+\beta-r}{\beta-m-r} \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt, dass

$$\alpha > -2, \quad \beta > 2n \quad (n=1, 2, \dots, m-1) \quad (48)$$

ist, und dass $2m+1-\beta$ keine natürliche Zahl ist, sodass man in Hilfsatz 4 Beziehung (10) mit $n=m$, Beziehung (11) mit $n=1, 2, \dots, m-1$ anwenden kann.

Wird in Satz 1

$$e_{rs} = \Gamma(\alpha+r+s) \Gamma(\beta-r-s) \quad (r=1, 2, \dots, m; \quad s=1, 2, \dots, m)$$

gesetzt, so ist wegen (48) und (11)

$$D_n > 0 \quad (n=1, 2, \dots, m-1).$$

sodass die Bedingungen von Satz 1 erfüllt sind. Mit Rücksicht auf (10) mit $n = m$ folgt aus Satz 1 also, dass die Ungleichung (47) gilt.

Folgerung 1. Aus $\beta > -3$ und $\alpha - \beta > 2m$ folgt

$$\sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \frac{u_r u_s}{\binom{\alpha}{\beta+r+s}} \equiv \frac{\alpha+1}{\alpha+2-m} \frac{u_m^2}{\binom{\alpha+1-m}{\beta+1-m} \binom{\alpha-\beta-m}{m-1}} \quad (49)$$

Beweis. Nach den Voraussetzungen ist $\beta+1 > -2$ und $\alpha-\beta+1 > 2m-2$, $\alpha-\beta+1 \neq 2m-1$, $\alpha-\beta+1 \neq 2m$, sodass wir Satz 7 mit $\beta+1$ statt α und $\alpha-\beta+1$ statt β anwenden können. Also

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \Gamma(\beta+1+r+s) \Gamma(\alpha-\beta+1-r-s) u_r u_s \\ \equiv (m-1)! \Gamma(\beta+2+m) \Gamma(\alpha-\beta+1-2m) u_m^2 \prod_{r=1}^{m-1} \frac{\alpha+2-r}{\alpha-\beta+1-m-r}. \end{aligned}$$

Aus den Voraussetzungen folgt weiter

$$\alpha+1 > 2m-3+1 \equiv 0.$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \frac{\Gamma(\beta+1+r+s) \Gamma(\alpha-\beta+1-r-s)}{\Gamma(\alpha+1)} u_r u_s \\ \equiv \frac{(m-1)! \Gamma(\beta+2+m) \Gamma(\alpha-\beta+1-2m)}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot u_m^2 \prod_{r=1}^{m-1} \frac{\alpha+2-r}{\alpha-\beta+1-m-r} = \\ = \frac{\alpha+1}{\alpha+2-m} \frac{\Gamma(\beta+2+m) \Gamma(\alpha-\beta+1-2m)}{\Gamma(\alpha+2-m)} \frac{(m-1)!}{\prod_{r=1}^{m-1} (\alpha-\beta+1-m-r)} u_m^2, \end{aligned}$$

womit (49) bewiesen ist.

Folgerung 2. Für $\alpha > -\frac{3}{2}$, $\beta > m - \frac{3}{2}$, $\beta \neq m-1$ und $\beta \neq m - \frac{1}{2}$ ist

$$\left. \begin{aligned} \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \binom{2\alpha+r+s}{\alpha+r} \binom{2\beta-r-s}{\beta-r} u_r u_s \equiv \\ \frac{\binom{2\alpha+2m}{\alpha+m} \binom{2\beta-2m}{\beta-m} \binom{2\alpha+2\beta+1}{m-1}}{\binom{2\alpha+2m}{m-1} \binom{2\beta-m}{m-1}} u_m^2. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Beweis. Nach den Voraussetzungen ist

$$2\alpha+1 > -2, \quad 2\beta+1 > 2m-2, \quad 2\beta+1 \neq 2m-1, \quad 2\beta+1 \neq 2m,$$

sodass die Bedingungen von Satz 7 mit $2\alpha+1$ statt α und $2\beta+1$ statt β erfüllt sind.

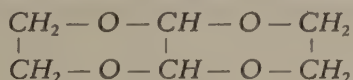
Wegen $\alpha > -\frac{3}{2}$ sind weiter die Zahlen $\alpha + 1 + r$ ($r = 1, 2, \dots, m$) positiv, während, mit Rücksicht auf $\beta > m - \frac{3}{2}$ und $\beta \neq m - 1$, die Zahlen $\beta + 1 - r$ ($r = 1, 2, \dots, m$) positiv oder nicht-ganz sind. Man kann also Satz 7 anwenden mit $2\alpha + 1$ statt α , $2\beta + 1$ statt β und $\frac{u_r}{\Gamma(\alpha + 1 + r) \Gamma(\beta + 1 - r)}$ statt u_r ($r = 1, 2, \dots, m$).

Es folgt dann

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \frac{\Gamma(2\alpha+1+r+s)}{\Gamma(\alpha+1+r) \Gamma(\alpha+1+s)} \frac{\Gamma(2\beta+1-r-s)}{\Gamma(\beta+1-r) \Gamma(\beta+1-s)} u_r u_s \\ \equiv \frac{(m-1)! \Gamma(2\alpha+2+m) \Gamma(2\beta+1-2m)}{\Gamma^2(\alpha+1+m) \Gamma^2(\beta+1-m)} u_m^2 \prod_{r=1}^{m-1} \frac{2\alpha+2\beta+2-r}{2\beta+1-m-r} = \\ = \frac{\Gamma(2\alpha+1+2m)}{\Gamma^2(\alpha+1+m)} \frac{\Gamma(2\alpha+2+m)}{\Gamma(2\alpha+1+2m)} \frac{\Gamma(m)}{\Gamma^2(\beta+1-m)} \frac{\Gamma(2\beta+1-2m)}{\Gamma^2(\beta+1-m)} u_m^2 \prod_{r=1}^{m-1} \frac{2\alpha+2\beta+2-r}{2\beta+1-m-r}, \end{aligned}$$

womit (50) abgeleitet worden ist.

Chemistry. — On the Two Isomeric Naphtho-Dioxanes 1.4.5.8



an example of *cis-trans* isomerism in oxygenous six-rings of the decahydro-naphthalene type. By J. BÖESEKEN, F. TELLEGEN, and P. COHEN HENRIQUEZ.

(Communicated at the meeting of May 30, 1931.)

Introduction.

It may be considered as known (compare Proceedings 24, p. 202—204, 1921) that the absence of an increase of conductivity of boric acid by *cis*-cyclo-hexane diol 1.2, in contrast with the great influence exerted by the corresponding cyclo-pentane diols 1.2, was the first experimental confirmation of SACHSES¹⁾ conception of the tensionless rings with more than five atoms, also taking note of the suppletory interpretation of ASCHAN that they must be imagined as mobile²⁾, to avoid the consequence that when the atoms do not lie in the same plane, stereo-isomers are possible, which have never been separated yet.

The hydroxyl groups at vicinal C-atoms, of which it had been proved by another way, that they repel each other, can then lie apart as far as possible and in the *cis*-position, they even lie unfavourably for the ready formation with boric acid and acetone of five-membered ring systems. That these five-membered rings can be formed, must be accepted as an experimental proof of the mobility of the *six*-membered rings.

In the *trans*-cyclo-hexane diols 1.2 the position of the hydroxyl groups is still more unfavourable and it can easily be demonstrated by the atom models that with the movements of the molecule they will never reach such a position that a five-ring e.g. with acetone will easily be formed. In fact HERMANS³⁾ found no indication of the formation of a cyclic acetone compound.

Yet five-ring formation with groups in a 1.2 *trans*-position of a saturated six-ring must be possible, witness the separation by BAEYER⁴⁾ of the anhydride of *trans* cyclo-hexane-o-di-carbonic acid, though it is possible that the combination of the two rings is not tensionless in this case.

If two saturate *six*-ring systems are in question, the chance to ring closure in the transposition becomes considerably greater, and the separation of

¹⁾ SACHSE, Berichte 23, p. 1363; Zeitschr. physik. Chem. 10, 228 (1890).

²⁾ O. ASCHAN, Alicyclische Verbindungen, p. 328—338.

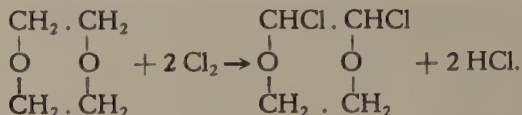
³⁾ P. H. HERMANS, Zeitschr. anorg. Ch. 142, p. 90 (1924).

⁴⁾ Annal. 166, 350 (1873), 258, 214 (1890).

the two decahydronaphthalenes by HÜCKEL and the study of their derivatives¹⁾ were a welcome supplement of our experiments and a corroboration of our views.

In the study of the chlorination of dioxane and of the reactionproducts of the dichlorodioxane obtained, we met with a case of isomerism, which is explained in the simplest way by the assumption of two stereo-isomers in the same way as the two deca-hydronaphthalenes of HÜCKEL.

The dioxane, the cyclic anhydride from two molecules of glycol, which is at present technically prepared on a large scale, can be very well chlorinated; two hydrogen atoms are then replaced by chlorine atoms:



That these chlorine atoms are bound to vicinal carbon atoms can be proved by decomposing this substance with water; we then find one molecule of glycol and one molecule of glyoxal



which could be proved by determining this last substance as *di*-(nitro-phenyl) osazone.

These chlorine atoms are very mobile; with sodium alcoholate the vic. di ethyl ether of dioxane is formed quantitatively; this aether is a very stable compound.

When di chloro dioxane is heated with glycol in benzenic solution, hydrochloric acid is generated. When after the reaction the benzene is evaporated off, a crystalline mass remains, which, after systematic recrystallisation from alcohol, can be separated into two substances, melting resp. at 133°—136° and 109°—112°, neither of which are accordingly quite pure yet, but of which the analyses and the determination of the molecular weights leave no doubt but we have to do with two isomers. In view of the synthesis these can hardly be anything but stereo isomers, which may be represented by the symbols. (See Plate).

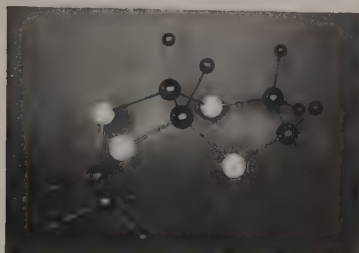
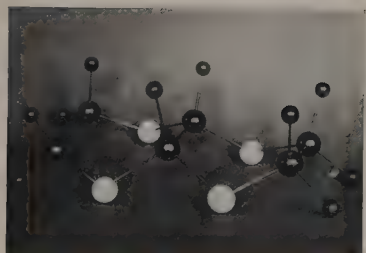
As the name: "di-dioxane" might give rise to confusion, we propose to designate the substances as *cis*- and *trans*-*naphtho*-dioxane, leaving it for the present an open question which is the *cis* and which the *trans*.

It is our intention to continue the study of these compounds and their derivatives in different directions. Just as the substitution of an oxygen atom for a C-atom does not greatly modify the rigidity of the *five*-ring²⁾, so the pliancy of the *six*-rings does not change by the introduction of oxygen atoms in the ring.

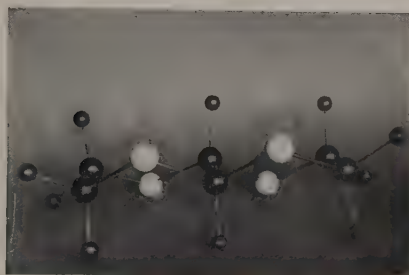
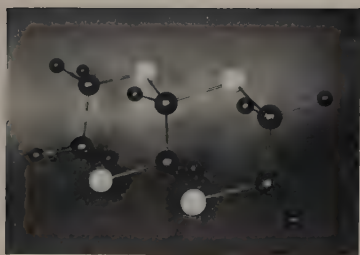
¹⁾ W. HÜCKEL, Annal. **441**, 1 (1925), **451**, 9 (1926). Cf. E. MOHR, Journ. of pr. Chem. II, **98**, p. 315 (1918), and Berichte **55**, p. 230 (1922).

²⁾ „De stereochemie der Wijnsteenzuren". Proefschrift J. COOPS, p. 60 and These Proc. **28**, p. 374 (1925).

J. BÖESEKEN, F. TELLEGEN AND P. COHEN HENRIQUEZ:
ON THE TWO ISOMERIC NAPHTHO-DIOXANES 1.4.5.8.



Cis-naphtho-dioxane 1.4.5.8



Trans-naphtho-dioxane 1.4.5.8

Special and Experimental Part.

Dioxane has been known for a long time. LORENCO¹⁾ obtained it from glycol and ethylene bromide. WURTZ from liquid ethylene oxide²⁾ with bromine. We prepared it according to FAWORSKY³⁾ by slow distillation of glycol, to which 4 % conc. H_2SO_4 had been added; we freed it from the by-products acetaldehyde and cyclic acetal of glycol with acetaldehyde by careful fractionation. The method of VAN ALPHEN⁴⁾ from glycol and ferri-sulphate gave us no better yield. By FAWORSKY'S method we obtained 30 %, according to VAN ALPHEN'S 15—20 %.

200 cc of glycol mixed with 7 cc of conc. H_2SO_4 was heated to its boiling point, and then 300—400 cc of glycol from a funnel were added in drops. At $\pm 100^\circ$ a mixture distils over which is separated into two layers on addition of calcium chloride. The upper layer chiefly contains the dioxane: it is dried on CaCl_2 , and then fractionated. The lowest-boiling fraction is chiefly the cyclic glycol-acetal, boiling point 84° — 85° ; the highest-boiling fraction b.p. 100° — 101° is the dioxane.

Of dioxane several addition compounds are known. WURTZ (loc. cit.) obtained dioxane dibromide $\text{C}_4\text{H}_8\text{O}_2\text{Br}_2$, melting point 65° — 66° , a light brown compound. Also with iodine, ICl and IBr addition compounds of the same type have recently been separated⁵⁾.

A corresponding *di*-chloride is not known. If chlorine is led into dioxane, it at first readily dissolves without coloration; only later a yellow coloration sets in. It is very probable that at first an addition product is formed. Very soon after, however, the formation of hydrochloric acid sets in, that is to say: substitution takes place, so that the separation of dichloride is probably only possible when chlorine and dioxane are added in an indifferent medium at low temperature.

We have executed the substitution reaction by leading chlorine at 90° into dioxane which was put in a spiral washing flask, 85 gr. could be chlorinated in this way in 16 hours⁶⁾. A colourless liquid was then formed, which was readily decomposed by water on account of the mobility of the chlorine atoms. After removal of the dissolved Cl_2 and HCl by heating, dry pyridine was added, to remove the last rests of HCl ; it was diluted with dry ether; then $\text{C}_5\text{H}_5\text{NHCl}$ was precipitated, and the liquid was distilled in vacuum.

First unchanged dioxane went over (12 gr.), and then 90 gr. of dichloro-dioxane b.pt. $82^\circ.4$ at 14 mm. Not a trace of monochloro-dioxane was found, not even when we had purposely taken an excess of dioxane.

¹⁾ Ann. de Ch. **3**, 67, 284, 288 (1863).

²⁾ Ann. de Ch. **3**, 69, 323 (1863).

³⁾ Zent. Blatt. 1907, I, p. 15.

⁴⁾ Recueil **49**, 1041 (1930).

⁵⁾ RHEINOLDT and BOY, Journ. f. pr. Chem. [2] **129**, p. 273 (1931).

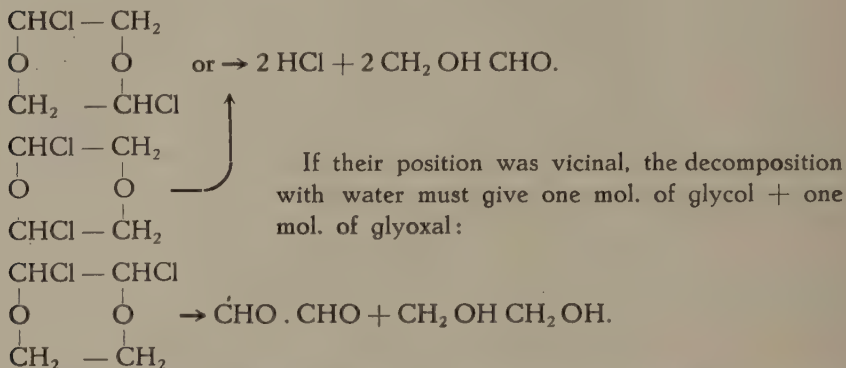
⁶⁾ We feel it as a pleasant duty to express our indebtedness to Mr. P. MALTHA for his assistance in the systematic investigation of the best conditions for this reaction.

Analysis.

0.0944 gr. of substance gave 0.1705 gr. of AgCl found 44,7 } calc. for
 0.167 " " " " 0.3052 " " " " 45,2 { $C_4H_6O_2Cl_2$, 45,2%.

In order to find out to what C-atoms the chlorine atoms were bound, the compound was decomposed with water, which takes place quickly and quantitatively on gentle heating.

If the two chlorine atoms were situated at the places 2—5 or 2—6, nothing but glycolaldehyde could have been formed :



As the aqueous solution gave with p-nitro-phenyl-hydrazine *in the cold immediately* the di(nitrophenyl) osazone (m. p. 309°) in about the calculated quantity for one molecule :

0.2397 gr. of dichlorodioxane gave 0.4924 gr. of oxazone, calculated 0.500 gr.
 0.1833 " " " " 0.3739 " " " " 0.381 "

and the reactions with glycolaldehyde proved negative, we have to do with 2.3 dichlorodioxane. Presumably this is a mixture of the two stereo isomers, though nothing appeared of this in the distillation¹⁾.

If the dichlorodioxane is brought together with an anhydrous alcoholic solution of NaOC_2H_5 in the ratio of 1:2 mol., NaCl splits off with generation of heat; after centrifugation of the precipitate and evaporation of the alcohol, a colorless liquid, with a pleasant smell, readily soluble in alcohol and dioxane, but not easily soluble in water, distills over at 96°—97° and a pressure of 15 mm.

Analysis :

0.0895 gr. give 0.1774 gr. of CO_2 and 0.0743 gr. of H_2O } Found C=54.1 and
 0.1345 " " 0.2660 " " " " 0.1105 " " " " } 54.0%;
 } H=9.2 and 9.1 %
 } Calculated C=54.5 "
 } H=9.0 "

¹⁾ It is very probable that at the boiling point the two stereo isomers form an equilibrium mixture, also in gaseous condition, under the influence of the hydrochloric acid, which is always present.

This substance, very probably 2.3 dioxane *di* ethyl ether, is very stable, is e.g. not hydrolysed by boiling with diluted acids (no reduction).

Preparation of the Naphtho-dioxanes 1.4.5.8.

In dry benzene dichloro-dioxane is boiled with a slight excess of glycol for 16—20 hours at a reflux-refrigerator with CaCl_2 -tube, till the formation of hydrochloric acid has ceased. Then it is cooled, poured off from the slight quantity of glycol which is insoluble in benzene, and the excess of benzene is evaporated at 30° in vacuum. There then remains a somewhat soft crystalline mass, which is recrystallised out of the sevenfold quantity of alcohol; the crystals now present a melting range of 85° — 110° . After having been again dissolved in alcohol in the same way, they are crystallised out in fractions; after a twice repeated recrystallisation the *first* fraction has a melting-point of 133° — 136° . Now follow a few intermediate fractions with larger melting ranges; after having been twice recrystallised the *last* fraction has a melting point of 109° — 112° .

Analyses	Found	Calc. for $\text{C}_6\text{H}_{10}\text{O}_4$
I. Mixture, melt. range 87° — 120° 16.05 mgr. gave 28.91 mg. CO_2 and 9.94 mg. H_2O	C = 49.1; H = 6.9	C = 49.3; H = 6.8
II. Highest-melting substance Mpt. = 133 — 136° 20.21 mg. gave 36.75 mg. CO_2 and 12.38 mg. H_2O 17 " " 30.40 " " 10.55 " "	C = 49.6; H = 6.8 C = 48.8; H = 6.3	" "
III. Lowest-melting substance Mpt. 109° — 112° 14.43 mg. gave 26.06 mg. CO_2 and 9.03 mg. H_2O	C = 49.3; H = 6.9	" "

Cryoscopic determination of the mol. weight according to Rast in camphor.

	Depression	Found	Calculated
Highest-melting substance, 8.2 mg. dissolved in 98.0 mg. campher.	$22^\circ.4$ C.	149	146
Lowest-melting substance, 6.0 mg. dissolved in 99.6 mg. campher.	$15^\circ.2$ C.	158	

It follows from this that we have to do with isomers, and on the strength of the way of formation, with stereo isomers of the decahydro-naphthalene type.

*Laboratory of Organic Chemistry of
the Technical University.*

Delft, May 1931.

Anatomy. — *Die Terminalbeuge des Vorderhirns bei den Chordaten und die prootischen Nerven der Kranioten bei Amphioxus.* Von J. W. VAN WIJHE. (Aus dem Anatomisch-Embryologischen Laboratorium in Groningen).

(Communicated at the meeting of May 30, 1931.)

Zweite Mitteilung: Schluss des Riechorgans.

Monorrhinie und Amphirrhinie.

Wenn die Vorstellung von der Amphirrhinie der hypothetischen Larve (vgl. die erste Mitteilung) richtig ist, so steht doch nichts im Wege die bleibende Monorrhinie des *Amphioxus* (aus der Amphirrhinie jener Larve durch das Zusammenlegen der Seitenränder der Scheitelplatte entstanden) als ein Stadium zu betrachten, das bei den höheren Tieren, mehr oder weniger abgekürzt, in der Entwicklung durchlaufen wird.

Bei den *Cyclostomen* sind die Riechnerven nur wenig auseinander gerückt. Die Riechplakode¹⁾ wird einheitlich angelegt, aber bei älteren *Ammocoetes* unvollständig geteilt durch ein an der dorsalen Wand der Riechgrube auftretendes medianes Septum. Bei *Bdellostoma* gibt VON KUPFFER (1900, p. 61) an, das Septum entstehe an der ventralen Wand. Dies ist topographisch richtig. Morphologisch aber tritt dasselbe auch hier an der dorsalen Wand auf, da sich das Riechfeld ventralwärts umbogen hat. Nachdem das Septum ausgebildet ist, trennt dasselbe die Riechgrube bei *Bdellostoma* in zwei Hälften, denn VON KUPFFER (1899, p. 25; im Separat p. 5) sagt vom ältesten Embryo den er beschrieb, die Grube habe jetzt „zwei durch das mediane Septum getrennte Mündungen in den Hypophysencanal“.

Die *Cyclostomen* sind also amphirrhin, nicht nur wegen des paarigen Riechnerven, sondern auch in Betreff der geteilten Riechplakode. Dieselbe durchläuft aber ein monorrhines Stadium und dies darf auch vom Nerven erwartet werden, weil dessen Fibrillen bei anderen Kranioten als Ausläufer der Riechzellen entstehen.

Vielfach wird angenommen dass die *Cyclostomen* von *Gnathostomen* abstammen. Ich halte aber eine solche Abstammung für ausgeschlossen, schon durch die Verschiedenheit der beiden Nebenapparate, die sich der Riechgrube angefügt haben, nämlich die paarige Nasengrube bei den *Gnathostomen* und der unpaare Hypophysenkanal bei den *Cyclostomen*. Wie wir weiter unten sehen werden, sind diese beiden Apparate von Anfang an verschieden und nicht von einander ableitbar.

¹⁾ VON KUPFFER glaubt der Embryo von *Petromyzon* habe drei Riechplakoden, eine unpaare und derselben unmittelbar angeschlossen eine paarige. Die Existenz der paarigen wird aber von PETER (1901, p. 9) in Abrede gestellt.

Man hat die Cyclostomen in die Gruppe der Monorrhinen untergebracht in einer Zeit als man — wie bis heute — die äussere Öffnung des Hypophysenkanals für das Homologon der Nasenöffnungen der Gnathostomen hielt. Da aber die Cyclostomen keine Nasenhöhle im Sinne der höheren Tiere besitzen, so geht ihnen auch die äussere Öffnung dieser Höhle ab.

Die primitiven Kranioten, deren Schädel noch grossenteils oder ganz membranös war, haben sich in einer frühen geologischen Periode in zwei divergierende Stämme: Cyclostomen¹⁾ und Gnathostomen geteilt.

Unter den *Gnathostomen* bilden die Selachier eine primitive Gruppe bei welcher wir auch primitive Erscheinungen in der Entwicklung erwarten können. Wir wollen uns auf diese Gruppe beschränken und erst die Haifische, dann die Rochen besprechen.

Bei *Acanthias* hat HOFFMANN (1896, p. 270—276) über die Entstehung des Geruchsorgans und seiner Nerven wohl am ausführlichsten berichtet. Er fand, dass das Organ und der Nerv aus der unpaaren, medianen Zellmasse hervorgehen, welche noch nach Verschluss der Neuroporusöffnung Epidermis und Hirn verbindet, ohne gegen dieselben abgegrenzt zu sein.

LOCY, der Entdecker des N. terminalis bei Selachiern, der nach seinem Vorgange bald als ein typischer Nerv der Vertebraten anerkannt wurde, sagt über *Acanthias* (1905, p. 112): „I have given much attention to sections of embryos from 6 to 8 mm long and I have repeatedly observed that there exists a cellular connection between the olfactory plate and the brain-wall as described by Hoffmann..... In embryos about 10 mm long, however, fibers are to be seen extending from the neuropore to the olfactory epithelium.”

Nach dieser Bestätigung von HOFFMANNs Angaben kann man dem Widerspruch von BERLINER (1902) der unter PETERS Leitung über *Acanthias* gearbeitet hat, nicht viel Wert beimessen. Er sagt (l.c. p. 388): „dass hier nicht die geringsten Beziehungen zwischen dem werdenden Sinnesorgan und dem Neuroporus bestehen.” Dieser Ausspruch ist mir unbegreiflich²⁾. Auf der Abbildung die er gibt (l.c. Taf. 20, Fig. 1, Querschnitt durch einen Embryo von 3 mm Länge) sieht man den Zusammenhang beider Teile deutlich. Noch deutlicher sieht man denselben auf dem Schnitt durch einen Embryo von *Scyllium catulus* (*Catulus stellaris*) auf einem entsprechenden Stadium. Derselbe wurde von mir (1882, Taf. 4, Fig. 29) gezeichnet, als ich noch glaubte hier in der Region der Epiphysis (*ep'*) statt des Riechorgans zu sein.

Die Nerven (Terminalis und Olfactorius) werden in der Zellmasse des Neuroporus erst kenntlich wenn sie Fibrillen aufweisen und dies geschieht verhältnismässig spät. LOCY hat den Olfactorius in früheren Stadium wahrgenommen als HOFFMANN, dessen Arbeit in einer Zeit erschien als der

¹⁾ Wir werden dies weiter unten näher begründen.

²⁾ Ich gestehe aber, dass BERLINER über spätere Stadien des Geruchsorgans bei *Acanthias* brauchbare Beiträge geliefert hat. Den Nerv hat er kaum berücksichtigt.

Terminalis noch unbekannt war. Das früheste Stadium in welchem LOCY Fibrillen sehen konnte, war dasjenige des oben erwähnten Embryos von 10 mm Länge. Er hielt diesen Nerv für den Terminalis. Bei wenig längeren Embryonen aber sah er an jeder Körperseite zwei Fibrillenbündel getrennt aus dem Gehirn treten und sagt (l.c. p. 112): „The earliest of these fibrous tracts to be established is the new nerve [Terminalis] the later one the main olfactory¹⁾. The two are present in embryos 13 mm long.“

Nach SCAMMON (1911, p. 29, Nr. 23) sind schon bei Embryonen von 9 mm Länge (über solche von 10 mm berichtet er nicht) 5 Kiementaschen vorhanden, von welchen die 3 vordersten offen sind.

Die Rochen scheinen günstiger als die Haifische für das Studium der ersten Entwicklung dieser Nerven. Ihre Lebensweise ist mehr am Meeresboden gebunden als diejenige der Haifische und dementsprechend ist auch ihr Riechorgan mehr entwickelt. Dies mag der Grund sein, dass auch die Nerven am Neuroporus in früheren Stadien sichtbar werden als bei den Haifischen.

Ich fand (1886, p. 680) bei Rochenembryonen (*Raja clavata*) im Stadium mit 4 noch geschlossenen Kiementaschen schon einen fibrillären Nerv am Neuroporus und hielt ihn damals für den Olfactorius; er mag aber der Terminalis gewesen sein. Die Präparate sind leider verloren gegangen.

PETER (1901a) legt zu viel Gewicht auf die selbständige Entstehung der (paarigen) Riechplakode bei *Lacerta*. Wenn sich diese Plakoden bei Selachiern als Seitenflügel der Umrandung des Neuroporus bilden und sich später frei machen, so ist es doch nur ein kleiner Schritt in der Verkürzung der Entwicklung, dass sie bei Amnioten selbständig auftreten. Ich sehe übrigens in PETERS Fig. 3 rechts (Taf. 32) nur zwei indifferente Zellen zwischen der Umrandung des Neuroporus und der Riechplakode. Dies ist doch wohl eine fast minimale Grenze zwischen beiden.

Ich halte dafür, dass die Cyclostomen die Amphirrhinie selbständig erworben, nicht von den Gnathostomen ererbt haben. Bei den Cyclostomen nämlich bleibt die (unpaare) Riechplakode verhältnismässig lange ungeteilt²⁾ und liegt stets in der Medianlinie, bis hier das Septum auftritt,

¹⁾ Dass der rechte und linke Terminalis (und dasselbe gilt für den rechten und linken Olfactorius) in frühen zelligen Stadien eine unpaare Masse am Dache des Neuralrohrs bilden und später auseinander rücken, ist nichts Besonderes. Seit BALFOURS Entdeckung der Nervenleiste („neural ridge“, später „neural crest“ genannt) bei Selachiern, wissen wir dass dasselbe allgemein für die dorsalen Hirn- und Spinalnerven gilt und wohl so aufzufassen ist, dass diese Nerven bei frühen Vorfahren, als die Neuralplatte noch offen war, vom Seitenrande derselben entsprangen.

Als bei späteren Vorfahren die Platte sich zum Rohre schloss, kamen die zelligen Nervenanlagen zu der scheinbar unpaaren Nervenleiste zusammen. Die Unterbrechung der Leiste zwischen Olfactorius und Nasocularis ist durch die starke Entwicklung des Prosencephalons begreiflich.

²⁾ Bei den Petromyzonten bleibt die Plakode in dorsaler Lage. Bei den Myxinoiden entsteht sie an der Körperspitze und rückt dann bald kaudalwärts, der ventralen Medianlinie entlang.

welches die Riechgrube mehr oder weniger vollkommen in zwei Hälften trennt. Der unpaare Hypophysenkanal aber, in welchen beide Hälften ausmünden, hält dieselben immer nahe beisammen.

Bei primitiven Gnathostomen dagegen machen sich die dorso-lateral liegende rechte und linke Plakode bald frei von der medianen Zellmasse am Neuroporus. Sie werden dadurch paarig, können an der Seitenwand des Kopfes hinunterrücken und fast durch die ganze Dicke des Vorderkopfes von einander getrennt werden. Wenn sie noch weiter ventralwärts rücken, nähern sie sich einander sekundär natürlich wieder.

Bei höheren Gnathostomen sind die Plakoden schon selbständig, sobald sie erkennbar werden.

Fassen wir das Vorgetragene kurz zusammen, so hatten die Wirbeltiere achordate Vorfahren mit einer Scheitelplatte, welcher rechts und links eine Riechplakode ansass.

Die Platte wurde rinnenförmig und schloss sich zum Rohre. Dadurch kamen die rechte und linke Plakode (auch deren Nerven) mit einander in Berührung und so entstand die Monorrhinie bei Amphioxus, welche als eine verkappte Amphirrhinie aufgefasst werden muss.

Bei den Cyclostomen rückten die Nerven am Hirn ein wenig auseinander. Die Plakode blieb lange noch einheitlich und in der Medianebene, bis hier das Septum dieselbe in zwei Hälften teilte.

Bei den Gnathostomen sind die Nerven wie die Plakoden *seitlich* auseinander getreten. Bei Selachierembryonen aber kommt das monorrhine Stadium (verkappte Amphirrhinie) noch vor.

Nach dieser Auffassung hat der Unterschied zwischen Monorrhinie und Amphirrhinie ihre frühere Bedeutung verloren.

Riechgrube und Nasenhöhle bei Gnathostomen.

Im Gegensatz mit dem Geruchsorgan der höheren Tiere ist die Riechgrube des Amphioxus von primitiver Einfachheit, nicht nur in ihrem Bau, sondern auch indem ihre Öffnung an der Oberfläche des Körpers liegen bleibt und keine Nachbarteile neben derselben eingestülpt werden¹⁾.

Das frühe rostrale Hinauswachsen der Chorda und die damit verbundene frühe Schnauzenbildung hätten eine solche Einstülpung auch wohl verhindert.

Der Terminalis, der Nasociliaris und ein Ästchen des Maxillaris versorgen die Haut der Schnauze, ohne sich an der Riechgrube zu beteiligen.

Zur Verstärkung des Wasserstroms (der bei den Luftathmern in einen

¹⁾ Die wenigen Flimmerzellen treten nicht neben die Riechgrube, sondern in diese selbst hinein.

Luftstrom verwandelt ist) welcher die Riechstoffe dem Geruchsorgan herbeiführen muss, haben sich nun bei den Kranioten zwei ganz verschiedene Nebenapparate ausgebildet.

Der eine Apparat ist unpaar; er ist der Hypophysenkanal (sieh den folgenden Paragraphen) der nur den Cyclostomen zukommt.

Der andere Apparat ist die paarige Nasenhöhle der Gnathostomen.

Wir müssen die Termini: Riechgrube und Nasenhöhle, die von vielen Autoren als Synonyme gebraucht werden, auseinander halten. Die Riechgrube ist das vom Olfactorius versorgte Gebiet, in welches bei Gnathostomen auch feine Zweige des Terminalis und Trigemini hineinwachsen. Der ausserhalb des Olfactoriusgebietes liegende Teil des Geruchsorgans bildet die eigentliche Nasenhöhle (in engerem Sinn).

Die Öffnung der Riechgrube, welche anfangs auch bei den Kranioten an der Körperoberfläche liegt, wird später in den Nebenapparat (Hypophysenkanal, resp. Nasenhöhle) aufgenommen und verschwindet damit in die Tiefe.

Die Nasenhöhle wird angelegt als eine paarige Hauteinstülpung deren Gebiet von sensiblen Zweigen sämtlicher protostomischen Dorsalnerven versorgt sein kann. Bei *Amphioxus* liegt dieses Gebiet, wie erwähnt, noch ganz an der äusseren Oberfläche der Haut.

Schon bei Fischen liegt der ganze Terminalis in der Nasenhöhle. Ausserdem sind nicht nur Zweige des Nasociliaris (*Ophthalmicus profundus*) sondern auch andere Zweige des Trigemini und sogar des Facialis in diese Höhle aufgenommen. Beim Facialis gehen dieselben vom *Ram. palatinus* ab. Es ist also ein verhältnismässig grosser Hautbezirk als Nasenhöhle eingestülpt, der von den gleichen dorsalen Hirnnerven wie bei Säugetieren versorgt wird. Hierbei wird angenommen, dass Nasenzweige des Ganglion sphenopalatinum, zum Teil auch dem Facialis angehören.

Es kann aber nicht mein Zweck sein, hier eine Übersicht bei sämtlichen Kranioten zu geben. Ein einziges Beispiel an einem primitiven Fisch wird genügen.

Bei *Protopterus annectens* erwähnt PINKUS (1895, p. 278, 279) die 'so eben genannten Nervenzweige in der Nasenhöhle. In Betreff des Facialis sagt er: „Auch der *R. palatinus* zieht nahe am Olfactorius medial vorbei zum Boden, Septum und Dach der Nasenhöhle“¹⁾

¹⁾ Sogar ein Lateralisast des Facialis ist auf einer kurzen Strecke in die Nasenkapsel eingeschlossen. PINKUS sagt (l.c. p. 297), dass ein Zweig des Nasociliaris sich vereinigt mit einem solchen des Maxillaris. Dann treten beide hinten in die knorpelige Nasenkapsel und verlaufen innerhalb derselben vorwärts. „Zu ihnen gesellt sich weiter vorn ein Ast des *R. ophthalmicus superficialis facialis*, [also ein Lateralisast] der vor der zweiten Gitterspange des Nasenknorpels in die Nasenkapsel tritt (Fig. 7). In der Nasenkapsel laufen Facialis- und Trigeminiast streng getrennt neben einander her. Zum Schluss verlassen sie die Nasenkapsel wieder an ihrem vorderen Ende..... und ziehen zur Haut“.

Riechgrube und Hypophysenkanal bei den Cyclostomen.

Der mediane Teil des Vorderkopfes, welcher bei Gnathostomen zwischen beiden Nasenhöhlen mit dem Septum zwischen den Riechgruben das Septum nasale bildet, trennt den rechten und linken Wasser-oder Luftstrom zu den entsprechenden Riechgruben.

Bei den Cyclostomen dagegen liefert der mediane Teil des Vorderkopfes an seinem Unterrande den unpaaren Hypophysenkanal, der den Wasserstrom für beide Hälften der Riechplakode unterhält.

Bei jungen Embryonen von Petromyzon bildet das Ektoderm in der topographisch ventralen Medianlinie des Kopfes zwei unpaare Blindtaschen, eine vordere, die Riechgrube und eine hintere, in der Polgegend, die Hypophysentasche, welche hart vor der Rachenhaut offen ist. Aus dieser Tasche gehen später die Hauthypophysis¹⁾ und bei fast sämtlichen Gnathostomen auch deren embryonaler Ausführungsgang hervor. Derselbe verlässt die Schädelhöhle durch das Polfenster und mündet aus in den Vorderdarm an der Stelle wo dessen ektodermaler und entodermaler Teil aneinander grenzen.

Die Hypophysis ist eine verzweigte Hautdrüse²⁾ welche bei sämtlichen ausgebildeten Kranioten den Ausführungsgang verloren hat und der Hirnhypophysis, einem drüsigen Auswuchs des Infundibulums, hart angelagert ist. Man nimmt jetzt an, dass das Sekret der Hauthypophysis in die Gefässbahn, dasjenige der Hirnhypophysis in die Höhle des Infundibulums aufgenommen wird. Die Behauptung von v. KUPFFER (1894) dass bei Myxine die Hypophysendrüse in offener Verbindung mit dem Infundibulum stehen sollte, wurde durch RETZIUS (1895) nach sorgfältiger Untersuchung widerlegt.

¹⁾ Wir wollen in diesem Aufsatz die Hauthypophysis einfach als „Hypophysis“ berechnen.

²⁾ VON KUPFFER (1894, p. 73, 74, 84) behauptet dass bei Rana und Salamandra ein medianer Entodermauswuchs (bei der Larve vor dem Durchbruch der Rachenhaut vorhanden) an der Bildung der Hypophysis beteiligt sei. Dies ist meines Wissens noch nicht bestätigt und auch sehr unwahrscheinlich, da ein solcher Auswuchs bei anderen Gruppen von Kranioten (auch bei Gymnophionen) die vergängliche mediane Verbindungsbrücke der rechten und linken Myotomreihe bildet.

Die Figuren 7 und 8 bei v. KUPFFER (resp. Froschlarve mit unversehrter Rachenhaut und junger Frosch noch mit kurzem Schwanzstummel) welche seine Behauptung beweisen sollen, sind dazu nicht geeignet, weil die Zwischenstadien fehlen. Ausserdem sieht man auf Fig. 8 keinen Unterschied mehr zwischen den Hautzellen (d_2) und den angeblichen Darmzellen (d_3) während dieser Unterschied auf Fig. 7 deutlich ist. Ich muss dafür halten, dass der Darmauswuchs der Fig. 7 in späteren Stadien, wie bei anderen Kranioten verschwindet, indem seine Zellen sich in das Mesenchym zerstreuen oder zu Grunde gehen.

Auf Fig. 8 machen sowohl d_3 als d_2 den Eindruck, Lappen der Hauthypophysis zu sein.

Beim jungen Störembrryo glaubt VON KUPFFER (1893, Fig. 13 und 14) gesehen zu haben, dass das proximale Ende Hypophysenanlage in das Entoderm geöffnet sei. Dies beruht wohl auf einer subjektiven Vorstellung, denn SAWADSKY (1912) hat von einer solchen Öffnung beim Sterletembryo nichts bemerkt.

Bei *Amphioxus* und den Tunikaten hat man bis jetzt vergeblich nach einem Homologen der Hauthypophysis gesucht. Die Hirnhypophysis ist bei Tunikaten aber seit den Untersuchungen von JULIN und VAN BENEDEN bekannt. Sie hat einen bleibenden Ausführungsgang, dessen äussere Öffnung der sekundär in das Stomodaeum getretene Neuroporus ist (ausnahmsweise bilden sich auch Öffnungen in das Atrium). Der Gang und die Drüse schnüren sich vom Hirn ab.

Bei Larven von *Amphioxus* finde ich, dass der Neuroporus auch als eine Ausführungsöffnung auftreten kann, da er bisweilen feine Körnchen des grossen schwarzen Pigmentflecks austreibt. *A fortiori* wird er auch Flüssigkeit aus dem Neuralkanal entfernen. Die Hirnhypophysis muss aber am Infundibulum liegen, wo sich das BOEKESche Sinnesorgan (vgl. 1908, Fig. 2, p. 478) befindet.

Ich bin aber geneigt, die Zellgruppe am Boden der Hirnblase zwischen dem Infundibularorgan und dem Pigmentfleck für den drüsigen Teil des Infundibulums zu halten. Die langen Zilien dieser Gruppe konvergieren gegen den Neuroporus, den sie fast erreichen (BOEKE, l. c.).

GOLDSCHMIDT (1905, p. 24, Fig. 9 und 11) hat das Austreiben von Teilen des Pigmentflecks durch den Neuroporus bei *Amphioxides* schon bemerkt.

So grosse Konglomerate von Pigmentkörnern wie bei *Amphioxides* sah ich aber niemals durch den Neuroporus treten. Die feine Öffnung desselben bei den *Amphioxus*larven hätte solche Konglomerate nicht durchgelassen. Wohl sah ich auf Schnitten von mit Karmin gefärbten Larven die Öffnung durchzogen von einer Strasse feiner schwarzer Pigmentkörnchen, wie solche auch im Augenfleck vorkommen.

Wir wollen jetzt zum Hypophysenkanal der Cyclostomen (Petromyzonten und Myxinoideen) zurückkehren.

Nachdem beim Embryo der Blindsack der Riechgrube und derjenige der Hypophysis aufgetreten sind, bildet sich die Auskleidung des Hypophysenkanals aus der ektodermalen Strecke zwischen beiden Blindsäcken. Der Kanal wächst topographisch von hinten nach vorn und verlängert sich, nachdem er die Ausmündung der Riechgrube aufgenommen hat, noch eine Strecke weiter rostralwärts.

Durch die Einmündung der Riechgrube zerfällt der Kanal in eine vordere, distale und hintere, proximale (dem Drüsenkörper näher liegende) Abteilung. Die vordere Abteilung ist die sog. „Nasenröhre“, welche bei Petromyzon verhältnismässig kurz bleibt, bei Myxinoideen aber lang und durch zahlreiche Knorpelstücke gestützt wird. Sie mündet am sog. „Nasenloch“ nach aussen aus und ist ein sekundärer Auswuchs des Kanals, der uns hier nicht weiter interessiert.

Das hintere Ende des Kanals bleibt bei den Petromyzonten geschlossen, es verlängert und erweitert sich nach der Metamorphose (und nach der Abschnürung der Hypophysendrüse) zum Wassersack, der sich unter dem Vorderende der Chorda über den Anfang des Ösophagus erstreckt.

Bei den Myxinoiden dagegen ist der Kanal („Nasenrachengang“) an seinem Hinterende in den Rachen geöffnet. Hier befindet sich eine quere Klappe am Unterrande des Hypophysenknorpels (AYERS und JACKSON, 1901, p. 196). Dieselbe muss nicht verwechselt werden mit dem sog. „Velum“, ein longitudinaler paarig angelegter Wulst im entodermalen Teil des Vorderdarms. Der Wulst beginnt hart kaudalwärts von der queren Klappe und erhält ein eigentümliches Knorpelskelett, das AYERS und JACKSON bei *Bdellostoma* ausführlich beschrieben haben.

GOODRICH (1909) hat in seinem Lehrbuch zwei instruktive Median-schnitte durch den Kopf und angrenzenden Rumpfteil abgebildet, den einen (l.c. p. 48, Fig. 30) bei *Bdellostoma Forsteri*, den anderen (l.c. p. 52, Fig. 34) bei *Petromyzon marinus*.

Verfolgt man den Hypophysenkanal in den Figuren kaudalwärts, so sieht man, dass er unter die Riechkapsel tritt und an deren Hinterrand in die Höhle des Hirnschädels gelangt, die er bald durch das Polfenster wieder verlässt um bei *Petromyzon* in den blind endigenden Wassersack, bei *Bdellostoma* bis an die Ausmündung im Rachen sich fortzusetzen.

In diesem Teil seines Verlaufes wird die ventrale Wand des Kanals gestützt durch die knorpelige Hypophysenplatte (l.c. Fig. 30) welche an der vorderen Begrenzung der Höhle des Hirnschädels beteiligt ist. Bei *Petromyzon* ist diese Platte (l.c. Fig. 34) rostralwärts zum breiten „posterior dorsal cartilage“ ausgewachsen.

Die Abbildungen des Kopfskeletts von *Bdellostoma* bei AYERS und JACKSON (1901, Plate 23, Fig. 7 und Plate 22, Fig. 6) werden diese kurze Beschreibung verdeutlichen. Auf der Dorsalansicht (l.c. Fig. 7) sieht man die unpaare Hypophysenplatte in ganzer Länge. An der Grenze ihrer vorderen $\frac{2}{3}$ und ihres hinteren $\frac{1}{3}$ ist sie mit den Vorderenden der Trabekeln verschmolzen. Mit AYERS und JACKSON kann man sie als eine rostrale und kaudale Verlängerung der schmalen Verschmelzungsstelle auffassen. Nur diese Stelle beteiligt sich an der vorderen Begrenzung des Hirnschädels. Hier, wie die Autoren sagen (l.c. p. 196) „the trabeculae, with their hypophysial expansion and the parachordals, completely encircle the hypophysial canal“ und für *Petromyzonten* gilt Ähnliches. Es ist morphologisch wichtig dass der Kanal durch den Hirnschädel tritt. Wir kommen sogleich darauf zurück.

Die vorderen zwei Drittel der Hypophysenplatte stützen den Kanal unter der Riechkapsel (l.c. Fig. 6). Das hintere Drittel¹⁾ stützt denselben bis zur Ausmündung im Rachen, nachdem er die Schädelhöhle bald durch das Polfenster verlassen hat.

Dieses mediane Fenster, welches GOODRICH (1909 p. 33) bei *Petromyzonten* „basicranial fontanelle“ nennt, wird vorn von den vereinigten Trabekeln und hinten von den mit denselben verschmolzenen Parachordalia umrahmt. Es kommt allgemein bei Kraniotenembryonen vor.

¹⁾ Offenbar infolge eines Druckfehlers ist der Stamm der Trabecula auf Fig. 6 (Seitenansicht) statt mit *Tr*, mit *Lc* bezeichnet.

Bei Embryonen von Gnathostomen wird die Verbindung der Trabekeln mit den Parachordalia¹⁾ vielfach durch die paarigen Polknorpel vermittelt. Ein solches Fenster ist in meiner Arbeit (1922, p. 281, Fig. 1) nach dem Modelle bei einem Acanthiasembryo von 28 mm Länge in morphologisch dorsaler Ansicht abgebildet.

In gleicher Ansicht sieht man dasselbe bei Bdellostoma auf der Abbildung von AYERS und JACKSON (l.c. Fig. 7; man vgl. auch die Seitenansicht, Fig. 6). Ob der Hypophysenknorpel entstanden ist, indem sich die Verschmelzungsstelle der Vorderenden der Trabekeln rostral- und kaudalwärts verlängert hat, oder ob der Knorpel selbständig entsteht, ist wohl nur durch die Entwicklungsgeschichte festzustellen. Jedenfalls beweist sein Vorhandensein, dass der Hypophysenkanal eine phylogenetisch sehr alte Bildung ist, da derselbe noch vor der Vereinigung der Vorderenden der Trabekeln von dem Gerüste des Hirnschädels umfasst wurde.

Da der Kanal bei Bdellostoma (bei Petromyzon scheint es nicht anders zu sein) schon zum Rohre geschlossen ist, bevor überhaupt Knorpelbildung im Schädel auftritt (vgl. die Abbildungen bei v. KUPFFER, 1900, Fig. 55—61, ff.) darf man annehmen, dass der Kanal phylogenetisch schon vor dieser Knorpelbildung vorhanden war. Man kann dann mit anderen Worten sagen, dass sich die Cyclostomen in einer frühen geologischen Periode von den übrigen Kranioten getrennt haben, wann noch kein Knorpel im membranösen Schädel aufgetreten war.

Ein Vergleich mit der Gaumenbildung der Kranioten, welcher älteren Autoren und auch v. KUPFFER (1900, p. 46) vorschwebte, ist aus vielen Gründen ausgeschlossen. Der stärkste Beweis dagegen ist wohl die Tatsache, dass der Hypophysenkanal durch den Hirnschädel hindurchtritt.

Entwicklung des Hypophysenkanals.

Die Entwicklungsgeschichte dieses Kanals ist interessant, da sie bei den Petromyzonten und den Myxinoiden scheinbar so verschieden ist. Durch viele Untersucher ist uns die Entwicklung bei Petromyzonten ziemlich gut bekannt geworden, aber bei den Myxinoiden sind wir fast²⁾ allein angewiesen auf die Arbeit von v. KUPFFER (1900), welche sehr wichtig ist, aber wegen der Sprödigkeit des Materials doch manche Lücken übrig lässt, die durch Nachuntersuchungen, welche noch auf sich warten lassen, angefüllt werden müssen.

Bei *Petromyzonten* wurden die Befunde von DOHRN (1882, 1883) vielfach bestätigt³⁾ nach welchen der Blindsack der Hypophysis unabhängig

¹⁾ Zwischen den Vorderenden der Parachordalia kann die Chordaspitze eine Zeitlang in das Fenster hineinragen.

²⁾ PRICE (1896) hatte schon drei ältere Embryonalstadien, die er A. B. C. nannte, beschrieben.

³⁾ GOODRICH (1909, p. 39, Fig. 29) hat vier instruktive Medianschnitte nach DOHRN abgebildet. DOHRN (1883, p. 180, 181) gibt auch interessante, ausführliche Zitate aus älteren Autoren über die Funktion des Hypophysenkanals (er gebraucht diesen Namen nicht).

von demjenigen der Riechgrube entsteht. Darauf bildet die Ektodermstrecke zwischen beiden das Dach des Hypophysenkanals.

Die frühen Stadien sind fast immer nur auf Medianschnitten untersucht, und auf solchen Schnitten hat es den Anschein als entstehe die Oberlippe (welche den Boden des Hypophysenkanals liefert) ausschliesslich aus dem Gewebe zwischen der Hypophysentasche und der Rachenhaut, indem sich dasselbe rostralwärts vorschiebe. Daher hat man nach dem Vorgange von HIS (1892) diese Oberlippe als eine „Rachenlippe“ bezeichnet.

Es handelt sich hier aber um eine typische Endnaht, in welche seitliche Teile am fortwachsenden Ende zusammengeschoben werden. Dass dies wirklich der Fall sein muss, zeigt der Vergleich mit *Bdellostoma*, wo der Boden des Hypophysenkanals in eine fast typische Seitennaht zustande kommt. Eine „Rachenlippe“ kommt also bei den Cyclostomen nicht vor.

Eine morphologisch weniger interessante Frage ist die Folgende:

Aus der Blindtasche der Hypophyse entsteht bei den Gnathostomen nicht nur die Drüse, sondern auch deren embryonaler Ausführungsgang, der nach dem Auftreten des Knorpelschädels, das Polfenster durchbohrend, hinten im ektodermalen Teile des Daches der Mundhöhle ausmündet.

Auf die Frage, wo sich dieser Gang bei *Ammocoetes* befinde, erhalten wir noch keine befriedigende Antwort. Man muss erwarten, dass derselbe in den Hypophysenkanal ausmündet, in der Nähe der Stelle wo der Wassersack (Spritzsack) angelegt wird. Aber die ersten Stadien desselben sind noch unbekannt und treten wahrscheinlich kurz vor der Metamorphose auf. Bei einem *Ammocoetes* von 14½ cm. Länge hat WOERDEMAN (1915, p. 267, Fig. 37) den Medianschnitt abgebildet. Der Wassersack ist noch nicht aufgetreten. Die dem Infundibulum angelagerte Hypophyse bildet schon Seitensprosse, doch hat sie sich noch nicht von ihrem larvalen Ausführungsgang (der fast ohne Lumen ist) abgeschnürt.

Bei den *Myxinoideen* ist v. KUPFFER (1900, p. 46) geneigt anzunehmen, dass das Entoderm an der Bildung der Hypophysis beteiligt sei. Ich halte aus vergleichend morphologischen Gründen eine solche Beteiligung für ausgeschlossen, denn nicht nur bei den Gnathostomen hat sich eine solche nicht bewährt (wie v. KUPFFER (1894, p. 84) mit Ausnahme von *Rana* und *Salamandra*, sieh oben, selbst anerkennt) auch bei *Petromyzon* kommt sie bekanntlich nicht vor. Nicht nur das Epithel der Drüse, sondern auch dasjenige des Hypophysenkanals sind bei *Petromyzon* ausschliesslich Produkte des Hautektoderms.

Ich gebe den folgenden Erklärungsversuch um die Verhältnisse bei *Bdellostoma* mit denjenigen der übrigen Kranioten in Einklang zu bringen. Dabei muss ich mehr ins Detail gehen als mir lieb ist. Der Leser wird diesen Versuch nur verstehen, wenn er die Geduld hat, die Abbildungen auf die verwiesen wird, bei VON KUPFFER nachzuschlagen.

Besonders wichtig ist das Stadium des Embryo IV in welchem der entodermale Teil des Vorderdarms schon angefangen hat, sich vom Dottersack frei zu machen und an demselben einen hohlen fingerförmigen Fortsatz

bildet. Dieser Fortsatz ist rostralwärts gerichtet und endet vorn blind an der Rachenhaut¹⁾.

VON KUPFFER war nicht in der Lage einen Medianschnitt aus diesem Stadium zu geben. Er bildet aber Querschnitte ab von welchen die vier vordersten (l.c. p. 23—27, Fig. 18—21) hier am meisten interessieren, weil die beiden mittleren die Rachenhaut (welche nicht vertikal, sondern schräg von oben kaudalwärts hinunterzieht) und auch den ekto- und den entodermalen Teil des Vorderdarms getroffen haben. Der vorderste Schnitt (Fig. 18) hat nur den ektodermalen Teil (Mundhöhle) der hinterste (Fig. 21) nur den entodermalen Teil des Vorderdarms durchschnitten.

Die zwei Hauptteile des Hypophysenapparates sind in diesem Stadium die Decke (samt den Seitenwänden) des Kanales und die hintere blinde Tasche aus welcher später die Drüse entstehen muss. Wir werden sofort sehen, dass diese beiden Hauptteile in Betreff des Epithels, wie bei *Petromyzon*, reine Ektodermprodukte sind.

Embryo IV zeigt dieselben am Dache der Mundhöhle in Gestalt einer scheinbar paarigen, ventralwärts offenen Rinne. Zwischen die rechte und linke Rinne dringt das Vorderhirn hinunter (vgl. den Querschnitt l. c. p. 23, Fig. 18). Dies weist darauf hin, dass die Rinne unpaar ist, dass aber ihre Decke²⁾ in der Medianebene durch das überlagernde Vorderhirn ventralwärts gedrückt³⁾ wird, so dass dieselbe hier in eine Flucht zu liegen kommt mit der Decke des entodermalen Darms (vgl. die Medianschnitte der Embryonen III und V, resp. p. 20, Fig. 17 und p. 37, Fig. 30).

Nach der Beschreibung des Querschnitts der Fig. 18 sagt v. KUPFFER (l.c. p. 24) „Am zweitnächsten Schnitte [weiter kaudalwärts] sieht man die medialen Furchen [d.h. die scheinbar paarige Hypophysenanlage] durch einen dünnen Schleier geschlossen und dieser Schleier hängt als ein ungefähr quadratischer Lappen noch in den Mundraum hinein. Das ist die Rachenhaut.“

Mit anderen Worten: Das kaudale Ende der scheinbar paarigen Hypophysenrinne bildet in der Infundibularregion über der Rachenhaut einen

¹⁾ Irrtümlich spricht v. KUPFFER (1900, p. 20, Fig. 17, Medianschnitt) bei einem etwas früheren Stadium (Embryo III) schon von einer „Rachenhaut“. Er bezeichnet damit die Stelle wo das Ektoderm des Dottersacks umschlagend, das Dotterentoderm berührt, weil hier das Mesoderm noch nicht vorgeschoben ist. Der Kopf ist noch im Gange sich vom Dottersack frei zu machen und die erwähnte Umschlagstelle liegt noch weit vor der Infundibularregion. Der entodermale Teil des Vorderdarms ist noch nicht aufgetreten.

Irreführend ist die Bezeichnung „sekundäre Rachenhaut“ (l. c. p. 48, Fig. 45) für den Epithelpfropf der in spät embryonalen Stadien die Öffnung des Mundes und des Hypophysenkanals vorn eine Zeitlang abschliesst. Hier fehlt doch das Entoderm. Ein etwas analoger Fall kommt bei Säugetierembryonen vor, indem die äusseren Nasenöffnungen eine Zeitlang von einem Epithelpfropfen geschlossen sind.

²⁾ Die Rinne liegt umgekehrt, mit dem Boden dorsalwärts, der im Texte als Decke der Rinne bezeichnet wird. Ventralwärts ist dieselbe in die Mundhöhle geöffnet.

³⁾ Es ist für unsere Auffassung gleichgültig ob dieser Druck vielleicht zum Teil eine Folge der Fixierungsweise sein mag oder nicht.

scheinbar paarigen Blindsack. Dies ist aber die Stelle, welche bei Petromyzon und den Kranioten überhaupt, der Anlage der Hypophysendrüse entspricht.

Das Epithel des Blindsacks und *a fortiori* der ganzen vor demselben liegenden Anlage des Hypophysenkanals sind, wie bei Petromyzon, reine Ektodermbildungen.

Sämtliche von v. KUPFFER beschriebenen Embryonen sind noch nicht so weit vorgeschritten, dass an der Drüsenanlage der Hypophysis schon Seitensprosse aufgetreten waren.

Unmittelbar hinter dem Blindsack, in der Verlängerung der Hypophysenrinne, bildet auch der entodermale Teil des Vorderdarms eine ähnliche Rinne welche an beiden Seiten des Infundibulums emporsteigt (l.c. Fig. 19—21). Dieselbe kann nach meiner Auffassung (gegen diejenige von v. KUPFFER) nicht an der Hypophysenbildung beteiligt sein. Sie steht wohl in Beziehung zu dem Auftreten des Velums, das hier bald in die Erscheinung tritt.

Auch das folgende Stadium, bei v. KUPFFER durch drei Embryonen: E. V bis E. VII repräsentiert, ist interessant weil jetzt der Boden des Hypophysenkanals angelegt wird. Dies geschieht in Gestalt einer paarigen. frontalen („horizontalen“) Mesenchymfalte, die mit Epithel bekleidet ist. Obgleich die Rachenhaut keine Spur hinterlassen hat, wissen wir, wie so eben gesagt, dass dieses Epithel ektodermaler Herkunft sein muss.

Embryo V wurde sagittal geschnitten und muss ziemlich jünger sein als die beiden ungefähr gleichaltrigen E. VI und E. VII, nicht nur weil die Mesenchymfalten einander noch nirgends berühren, sondern auch weil das Vorderhirn auf dem Medianschnitt (l. c. p. 37, Fig. 30) noch stets dem Munddarm unmittelbar aufliegt. Demzufolge wird in der Medianebeue das Dach des Hypophysenkanals und des Blindsacks noch stets so hinunter gedrückt, dass es in einer Flucht liegt mit der Decke am entodermalen Teil des Vorderdarms.

Doch sind die Zellen am ektodermalen Munddach (zwischen Riechsack und Infundibularregion) bedeutend höher als diejenigen an der entodermalen Darmdecke unter der Chorda. Am Hinterende der Infundibularregion gehen beide Epithelarten ohne scharfe Grenze allmählich in einander über.

Die frontale Mesenchymfalte, welche die Medianebeue noch nicht erreicht hat, ist auf mehr lateralen Sagittalschnitten sichtbar. VON KUPFFER hat einen solchen Schnitt in Fig. 31 abgebildet. Die Falte wurde bei *a p*²⁾ schräg getroffen.

Die *Embryonen VI* und *VII* wurden in Querschnitte³⁾ zerlegt. Sieben von

¹⁾ Dies gilt nicht nur für die Decke (und Seitenwände) sondern auch für den Boden des Hypophysenkanals bei *Bdellostoma*, da sich derselbe in den folgenden Stadien ebenfalls rostralwärts von dem Hypophysenblindsack bildet.

²⁾ In der „Bezeichnung der Abbildungen“ (l. c. p. 85) ist *a p* „Archipalatium“ ausgefallen.

³⁾ Die Bilder beider Schnittserien wurden kombiniert und werden hier als E. VII angehörig angeführt.

den abgebildeten Schnitten (l.c. p. 41, ff. Fig. 35 bis 41) sind durch den Hypophysenapparat geführt. Verglichen mit E. V zeigt der Embryo zwei belangreiche Fortschritte:

10. Das Vorderhirn berührt in der Medianebene die Decke des Kanals nicht mehr (nur an einer kleinen Stelle, Fig. 39, ist dieselbe mit dem Infundibulum noch in Kontakt) indem sich Mesenchym zwischen beide geschoben hat. Demzufolge hat diese Decke sich gehoben und weist nur noch eine schwache, ventralwärts konvexe Biegung auf.

20. Der Kanal hat sich hinten auf einer kleinen Strecke zu einer kurzen Röhre geschlossen. In folgenden Stadien geht der Verschluss rostralwärts weiter, indem die rechte und linke frontale Mesenchymfalte einander in der Medianebene berühren und verschmelzen. So wird der Boden des Kanales gebildet durch eine Art Endnaht, die fast in eine typische Seitennaht übergegangen ist. Bei *Petromyzon* dagegen geschieht diese Bildung des Bodens, wie erwähnt, mit einer typischen Endnaht.

Ein bemerkenswerter Unterschied mit *Petromyzon* ist, dass der Kanal in diesem Stadium hinter der kurzen Röhre nicht blindsackförmig endet, sondern noch eine Zeitlang in den Munddarm schlitzförmig offen ist. Das Vorderende des Schlitzes hat v. KUPFFER (l.c. p. 44, Fig. 41) abgebildet. Kaudalwärts erweitert sich derselbe allmählich und erstreckt sich bis in das entodermale Gebiet des Vorderdarms unter der Chorda (l.c. Fig. 42).

Zwar glaubt v. KUPFFER (l.c. p. 46) dass die kurze Röhre des Kanals „wahrscheinlich nur im Bereich des Entoderms“ liege, doch halte ich eine Herkunft derselben vom Entoderm für ausgeschlossen. Bei E. IV nämlich ist die Rachenhaut und ihre dorsale Fortsetzung, welche die Anlage des Hypophysenkanals hinten abschliesst, noch vorhanden und daraus ergibt sich, wie erwähnt, dass der ganze Hypophysenapparat ektodermaler Herkunft sein muss.

Bei E. VII sind die Rachenhaut und ihre Fortsetzung verschwunden, aber das Dach der kurzen Röhre und des vorderen Teiles des Schlitzes müssen dem Dache des ektodermalen Blindsacks bei *Petromyzon* entsprechen, aus welchem die bleibende Hypophysendrüse entsteht. Zwei Andeutungen davon sind bei E. VII vorhanden:

10. Die einzige Stelle an welcher der Kanal bei E. VII dem Hirn noch angelagert ist (l.c. Fig. 39) liegt am Infundibulum¹⁾. Sie hat sich noch bei E. IX, dem ältesten der von v. KUPFFER (1900) abgebildeten Embryonen, erhalten (l.c. p. 64, Fig. 59) und ist demnach zu betrachten als die sich später verbreiternde Stelle, wo die Hypophysendrüse dem Infundibulum nahe anliegt.

¹⁾ Der Kontakt zwischen Infundibulum und Hypophysenkanal persistiert aber nicht. Bei einem fast reifen Embryo von welchem v. KUPFFER in einer früheren Arbeit (1899, Fig. 1) den Medianschnitt abgebildet hat, ist zwischen dem Kanal und dem Hinterende des Infundibulums ein schmaler Spalt aufgetreten in welchen noch kein Mesenchym eingedrungen ist. Bei erwachsenen Myxinen fand RETZIUS (1895, Taf. VII, Fig. 1 und 2) die Hypophysendrüse überall durch eine dünne Bindegewebsschicht vom Infundibulum getrennt.

20. Am Vorderende des Schlitzes bei E. VII besteht die Decke des Kanals (l.c. p. 44, Fig. 41) aus hohen Epithelzellen, wie man solche bei der Anlage einer Drüse erwarten kann, jedenfalls sind sie sehr verschieden von dem niedrigen entodermalen Epithel (l.c. Fig. 42) an der Darmdecke unter der Chorda, weiter kaudalwärts.

Die hintere Ausmündung des Hypophysenkanals, die also noch im Bereich der Drüsenanlage liegt, entspricht der Ausmündung des Ausführungsganges der Drüse bei Embryonen von Gnathostomen.

Wider Erwarten geht die hintere Öffnung des Hypophysenkanals nicht in die bleibende Darmöffnung des „Nasenrachenganges“ über, sondern verschliesst sich, so dass der Kanal dann hinten blind endet. Er bleibt hier selbst nicht mehr mit dem Darm in Kontakt (l.c. Fig. 60 und 61). Der Kanal ist dann allseitig geschlossen und durch Flüssigkeitsaufnahme beträchtlich angeschwollen (l.c. Fig. 55 bis 58).

PRICE (1896)¹⁾ hat drei Stadien beschrieben, die er nach der Altersfolge mit A, B, C bezeichnet. Sein Stadium A stimmt mit E. VIII bei v. KUPFFER überein. In den Stadien A und B sah er sowohl das blinde Hinterende des Kanals als in A dessen vorderen Verschluss durch den Epithelfropfen (der im Stadium B schon von einer feinen Öffnung durchbohrt war). Die Mundöffnung war in sämtlichen drei Stadien von einem Epithelfropfen verschlossen.

Beim Embryo C, an dem schon die vier Paare Tentakeln aufgetreten waren, aber die Mundöffnung noch verschlossen war, endet der Hypophysenkanal nicht mehr blind, sondern (l.c. p. 72) „vereinigt sich hinten klaffend mit dem Darne“. Vorn war auch die äussere Mündung auf die Haut vorhanden.

VON KUPFFER (1899, Fig. 1) konnte diese Wahrnehmungen bestätigen an einem mit C ungefähr gleichaltrigen Embryo. Die proximale und distale Abteilung²⁾ des Hypophysenkanals, welche man durch die Ausmündungen der Riechgrube unterscheiden kann, sind schon ungefähr von gleicher Länge. Bei diesem Embryo waren auch schon einige Knorpel aufgetreten³⁾.

Nicht nur die Mundöffnung, sondern auch die vordere Öffnung des

¹⁾ PRICE erwähnt im Stadium A auch die vordere Kommunikation des Hypophysenkanals mit der Mundhöhle hinter dem Epithelfropfen. VON KUPFFER hat diese Kommunikation auf dem Medianschnitt durch E VIII (l. c. Fig. 45) abgebildet. Im Stadium B fand PRICE dieselbe verschwunden.

²⁾ Bei E. VIII (1900, Fig. 45, Medianschnitt) scheint die distale Abteilung gerade aufgetreten zu sein, als ein kurzer Fortsatz des Kanals unter der Riechgrube.

³⁾ Im Boden des Hypophysenkanals sind jetzt zwei von den drei grösseren Knorpeln des erwachsenen Tieres vorhanden. Sie liegen hart vor einander. Der vordere, längs geschnittene, ist der distale Basikanalknorpel (sog. basaler Nasenknorpel) der später die knorpeligen Kanalringe trägt. Den hinteren halte ich für die durchschnittene Kommissur der Palatinspangen, welche später den Palatinzahn stützt. Sollte diese Deutung richtig sein, so ist der proximale Basikanalknorpel (Hypophysenknorpel) noch nicht vorhanden, d. h. die Trabekeln sind vorn noch nicht verschmolzen. Der stets skelettfreie Teil hinter dem Infundibulum ist wohl die Anlage der „queren Klappe“, welche oben erwähnt wurde.

Hypophysenkanals waren noch von einem Epithelfropfe verstopft. Hinten war der Kanal aber weit offen in den Darm.

Diese Verstopfungen sind sicher cenogenetisch; ihre Perforation unterliegt wohl einigen individuellen Schwankungen.

Ich bin geneigt auch das zeitweise Verschwinden der hinteren Ausmündung des Kanals für cenogenetisch zu halten und anzunehmen, dass die Öffnung welche bei E. VII vorhanden ist, später an entsprechender Stelle wieder auftritt.

Wir wollen jetzt das über die Nasenhöhle und den Hypophysenkanal Gesagte zusammenfassen.

Diese Nebenapparate der Riechgrube haben beide die Funktion derselben einen Wasserstrom herbeizuführen; sie sind aber morphologisch durchaus verschieden.

Die Nasenhöhle kommt nur den Gnathostomen, der Hypophysenkanal nur den Cyclostomen zu.

Die Nasenhöhle entsteht bei den höheren Gnathostomen als eine paarige Einstülpung der dorso-lateralen Kopfhaut. An der Einstülpung können sich Zweige der sämtlichen prootischen Dorsalnerven beteiligen. Das mediane, topographisch ventrale Ektoderm, rostralwärts von der Anlage der Hypophysis, beteiligt sich nicht an der Bildung der Nasenhöhle.

Gerade diese Stelle bildet bei den Cyclostomen die Decke des Hypophysenkanals. Die Anlage der Decke ist bei *Petromyzon* deutlich unpaar, bei *Bdellostoma* aber scheinbar paarig, indem dieselbe median durch das auflagernde Gehirn hinuntergedrückt wird. Dadurch entsteht lateral vom Hirn eine scheinbar paarige Tasche, die ventralwärts in den ektodermalen Teil des Vorderdarms offen ist.

Dies zeigt v. KUPFFERS Embryo IV, der noch eine Rachenhaut besitzt, welche im Begriffe steht durchzubrechen¹⁾. Sie liegt in der Infundibularregion. Eine dorsale Verlängerung der Rachenhaut schliesst die Anlage des Kanals als einen scheinbar paarigen Blindsack ab.

Nach dem Verschwinden der Rachenhaut hat sich die Kanalanlage beim Embryo VII hart vor deren hinterem Ende zu einer kurzen medianen Röhre umgebildet, die rostralwärts fortschreitet. Das kaudale Ende der Röhre ist noch in den Vorderdarm offen. Bald aber (beim Embryo VIII) ist die Öffnung verschlossen und endet der Kanal, wie bei *Petromyzon*, mit einem unpaaren Blindsack.

Aus demselben muss die unpaare Hypophysendrüse entstehen, die aber während der Embryonalperiode nicht deutlich ist (bei *Petromyzon* wird dieselbe erst in späten Larvenstadien deutlich).

Gegen das Ende der Embryonalperiode mündet das Hinterende des Kanals wieder in den Darm aus. Vermutlich ist der zeitweise hintere

¹⁾ Vgl. auch den Medianschnitt durch Embryo V, bei welchem die Rachenhaut schon verschwunden ist.

Verschluss eine cenogenetische Erscheinung in der Entwicklung und war der Kanal phylogenetisch von seinem ersten Auftreten an stets in den Vorderdarm offen.

Der Boden des Hypophysenkanals scheint bei *Petromyzon* unpaar aufzutreten. Dieser Boden bildet zugleich die Oberlippe, so dass man geglaubt hat, dieselbe sei eine „Rachenlippe“, die nur aus dem medianen Gewebe zwischen der Drüsenanlage und der Rachenhaut hervorstübe. Es handelt sich aber um eine Endnaht und in einer solchen treten auch seitliche Teile zusammen so dass man keinen Grund hat hier eine „Rachenlippe“ anzunehmen.

Dies wird bestätigt durch *Bdellostoma* bei welchem der Boden des Kanals fast mit einer Seitennaht geschlossen wird. Die Teilnahme der seitlichen Zellmassen ist hier deutlich.

Verfolgt man bei ausgebildeten Cyclostomen den Kanal rückwärts, so tritt derselbe hart hinter der knorpeligen Riechkapsel in die Schädelhöhle, die er bald durch das Polfenster wieder verlässt. Bei Petromyzonten erweitert er sich dann zum blind endigenden Wassersack, bei Myxinoiden dagegen mündet er in den Vorderdarm aus.

Das frühe Auftreten des röhrenförmigen Hypophysenkanals, noch vor dem Erscheinen der Schädelknorpel, weist darauf hin, dass die primitiven Kranioten sich in einer frühen geologischen Periode in zwei Stämme: die Cyclostomen und Gnathostomen getrennt haben, die beide wahrscheinlich unabhängig von einander amphirrhin geworden sind.

Der Name *Cyclostomen* passt bekanntlich nur für die Petromyzonten, nicht für die Myxinoiden. Will man die beiden Hauptstämme der Kranioten nach primitiven Merkmalen einteilen, so kann man dafür den Besitz, entweder des unpaaren Hypophysenkanals oder der von Anfang an paarigen Nasenhöhle wählen. Man kann die beiden Hauptstämme dann als *Canaligera* = Cyclostomen und *Nasigera* = Gnathostomen unterscheiden.

LITERATURVERZEICHNIS.

- AYERS, HOWARD and JACKSON, C. M.: Morphology of the Myxinoidei, Journ. of Morphology, Vol. 17, 1901.
- BALFOUR, F. M.: A Monograph on the Development of Elasmobranch Fishes. London, 1878.
- BERLINER, K.: Die Entwicklung des Geruchsorgans der Selachier, Archiv. f. mikr. Anatomie u. Entw., Bd. 60, 1902.
- BOEKE, J.: Over den bouw van de Gangliencellen in het centrale Zenuwstelsel van *Branchiostoma lanceolatum*. Verslag v. d. Gew. Vergadering der Wis- en Nat. Afd. der Kon. Akad. van Wetensch. te Amsterdam van 30 Mei 1908.
- : Das Infundibularorgan im Gehirn des *Amphioxus*. Anatom. Anzeiger, Bd. 32, 1908.
- CERFONTAINE, P.: Recherches sur le développement de l'*Amphioxus*, Archives de Biologie, T. 22, 1906.
- DOGIEL, A. S.: Das periphere Nervensystem des *Amphioxus*, Anatomische Hefte, erste Abt. Bd. 21, 1903.

- DOHRN, A.: Die Entstehung der Hypophysis bei *Petromyzon Planeri*. Zoolog. Anzeiger, 1882.
- Studien zur Urgeschichte des Wirbelthierkörpers III. Die Entstehung der Hypophysis bei *Petromyzon planeri*. Mitth. aus der Zool. Station zu Neapel, Bd. 4, 1883.
- GOLDSCHMIDT, R.: Amphioxides. Wiss. Ergebnisse der deutschen Tiefsee-Expedition auf dem Dampfer „Valdivia“, Bd. 12, 1905.
- GOODRICH, E. S.: A Treatise on Zoology, Cyclostomes and Fishes. London, 1909.
- „Proboscis pores“ in Craniate Vertebrates, a Suggestion concerning the Premandibular Somites and Hypophysis. Quart. Journ. of micr. Science, Vol. 62, 1917.
- The Development of the Club-shaped Gland in *Amphioxus*. Quart. Journ. of micr. Science, Vol. 74, 1930.
- GOODSIR, J.: On the Anatomy of *Amphioxus lanceolatus*. Trans. of the Roy. Soc. of Edinburgh, Vol. 15, 1841.
- HATSCHEK, B.: Studien über Entwicklung des *Amphioxus*. Arb. des Zool. Instituts zu Wien, Tom. 4, 1881.
- Studien zur Segmenttheorie des Wirbeltierkopfes. 2. Mitteilung Morph. Jahrbuch, Bd. 39, 1909.
- 4. Mitteilung. Ibidem, Bd. 61, 1929.
- HIS, W.: Die Entwicklung der menschlichen und thierischer Physiognomien. Archiv. f. Anat. und Entwicklungsgesch. 1892.
- HOFFMANN, C. K.: Beiträge zur Entwicklungsgeschichte der Selachii. Morph. Jahrbuch, Bd. 24, 1896.
- KAPPERS, C. U. ARIËNS.: Die Vergleichende Anatomie des Nervensystems der Wirbeltiere und des Menschen. Haarlem, 1920 und 1921.
- The Evolution of the Nervous System in Invertebrates, Vertebrates and Man. Haarlem, 1929.
- KÖLLIKER, R. A.: Ueber das Geruchsorgan von *Amphioxus*. Müllers Archiv. f. Anat. 1843.
- KUPFFER, C. VON: Die Deutung des Hirnanhangs. Sitzungsber. der Ges. f. Morph. u. Phys. in München, 1894.
- Zur Kopfentwicklung von *Bdellostoma*. Ibidem, 1899, Heft 1.
- Studien zur vergleichenden Entwicklungsgeschichte des Kopfes der Kranioten. München und Leipzig, J. F. Lehmann. 1. Heft, Die Entwicklung des Kopfes von *Acipenser sturio* an Medianschnitten untersucht, 1893.
- Zur Kopfentwicklung von *Bdellostoma*. Ibidem, 4. Heft, 1900.
- LANGERHANS, P.: Zur Anatomie des *Amphioxus lanceolatus*. Archiv. f. mikroskop. Anatomie, Bd. 12, 1876.
- LOCY, W.: On a newly recognized Nerve connected with the Fore-brain of Selachians. Anat. Anz. Bd. 26, 1905.
- LUBOSCH, W.: Die erste Anlage des Geruchsorgans bei *Ammocoetes* und ihre Beziehungen zum Neuroporus. Morph. Jahrbuch, Bd. 29, 1902.
- PARKER, G. H.: The Sensory Reactions of *Amphioxus*. Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences, Vol. 43, No. 16, 1908.
- PETER, K.: Mitteilungen zur Entwicklungsgeschichte der Eidechse III. Die Neuroporusverdickung und die Hypothese von der primären Monorhinie der amphirhinen Wirbeltiere. Archiv. f. mikr. Anat. und Entwicklungsgesch. Bd. 58, 1901a.
- Die Entwicklung des Geruchsorgans und Jacobsonischen Organs in der Reihe der Wirbeltiere, Bildung der äusseren Nase und des Gaumens, 1901. Hertwigs Handbuch der vergl. u. exp. Entwicklungslehre der Wirbeltiere. Bd. 2, Teil 2, 1906.
- PINKUS, F.: Die Hirnnerven des *Protopterus annectens*. Morph. Arbeiten, herausg. von G. Schwalbe, Bd. 4, Heft 2, 1895.

- PRICE, G. C.: Zur Ontogenie eines Myxinoiden (*Bdellostoma Stouti*). Sitzungsber. der math. phys. Classe der k. bayer. Akad. d. Wiss. Bd. 26, 1896.
- RETZIUS, G.: Ueber die Hypophysis von Myxine. Biologische Untersuchungen, Neue Folge VII, 1895.
- SAWADSKY, A. M.: Entwicklung des larvalen Haftapparates beim Sterlet (*Acipenser ruthenus*. Anat. Anzeiger, Bd. 40, 1912.)
- SCAMMON, R. E.: Normal Plates of the Development of *Squalus Acanthias*. Normentafeln zur Entwicklungsgeschichte der Wirbeltiere, herausgegeben von F. Keibel. Heft 12. Jena, 1911.
- WIJHE, J. W. VAN: Ueber die Mesodermsegmente und die Entwicklung der Nerven des Selachierkopfes. Verh. der Kon. Acad. Amsterdam. Deel 122, 1882. Unveränderter Neudruck mit Anmerkungen, Groningen, 1915.
- Ueber den vorderen Neuroporus und die phylogenetische Function des Canalis neurentericus der Wirbelthiere. Zool. Anzeiger, 1884.
- Ueber die Kopfsegmente und die Phylogenie des Geruchsorganes der Wirbelthiere. Zool. Anzeiger, 1886.
- Over de hersenzenuwen der Cranioten bij *Amphioxus*. Kon. Acad. der Wetensch. Amsterdam. Vergadering van 27 Oct. 1894.
- Beiträge zur Anatomie der Kopfregion des *Amphioxus lanceolatus*. Petrus Camper, Deel 1, 1901.
- Frühe Entwicklungsstadien des Kopf- und Rumpfskeletts von *Acanthias vulgaris*. Bijdragen tot de Dierkunde. Uitgeg. door het Kon. Zool. Genootschap „Natura Artis Magistra“ te Amsterdam. Afl. 22, 1922.
- WOERDEMAN, M. W.: Vergleichende Ontogenie der Hypophysis. Archiv. f. mikr. Anatomie. 1. Abt. Bd. 86, 1915.
- ZIEGLER, H. E. und ZIEGLER, F.: Beiträge zur Entwicklungsgeschichte von *Torpedo*. Archiv. f. mikr. Anatomie, Bd. 39, 1892.

Astronomy. — *Mittlere Lichtkurven von langperiodischen Veränderlichen.*
III. *R Trianguli*. Von A. A. NIJLAND.

(Communicated at the meeting of May 30, 1931.)

Instrumente *R* und *S* (in der Fig. 1 mit *Z* bezeichnet); die Reduktion *R*—*S* beträgt $-0^m.26$. Spektrum: M4e—8e (*Harv. Ann.* 79, S. 164).

Gesamtzahl der hier zu besprechenden Beobachtungen 671 (von 2416845 bis 2426436).

Karte: HAGEN, *Atlas Stell. var. Series III*.

Vergleichsterne (Tabelle I).

Die Stufenskala bezieht sich auf die Helligkeit $9^m.5$; der Stufenwert ist $0^m.106$. Die Sterne *k* bis *n* wurden fünfmal an die Sichtbarkeitsgrenze von *S* angeschlossen: für *n* folgt hieraus die Helligkeit $11^m.54$. Der Anschluss der Stufenskala an die photometrischen Grössen ist nicht sehr befriedigend; die der *Harv. Ann.* 29 entnommenen Grössen der Sterne *f* und *g* fallen ganz heraus und mussten unberücksichtigt bleiben. Die PD-Werte wurden auf das System der HP. reduziert (vorletzte Spalte). Für den rotgelben Stern *C* ist diese Reduktion allerdings etwas unsicher, da die Reduktionstafel (*Publik. Potsdam XVII S. XXXIV*) nicht weiter als *G* geht.

Es liegen 123 Beobachtungen der Farbe vor, welche aber für drei Viertel aus den Jahren 1905 bis 1912 stammen. Aus der Tabelle IIa ist ersichtlich dass die Farbe sich im Laufe der Jahre 1905 bis 1930 kaum geändert hat; das Mittel ist $2^c.52$.

Viel deutlicher als eine Abhängigkeit von der Zeit ist eine solche von der Helligkeit ausgeprägt; aus der Tabelle IIb scheint wohl hervorzugehen, dass der Stern in meiner Auffassung bei $7^m.8$ die geringste Färbung zeigt. Ob die Erscheinung reell ist, kann ich vorderhand nicht beurteilen. Das auffällige, aber augenscheinlich gut verbürgte Resultat veranlasste mich, auch bei *W Herculis* und *T Cassiopeiae* einen etwaigen Zusammenhang von Farbe und Helligkeit nachzuprüfen; das Resultat war völlig negativ. Die merkwürdige Tatsache ist also in meinen Beobachtungen vorläufig nur bei *R Trianguli* festgestellt worden.

Die Fig. 1 enthält die Beobachtungen, alle auf *R* reduziert. Die Reihe der Abweichungen (Beobachtung minus Kurve) zeigt 273 Plus-, 227 Minuszeichen, 171 Nullwerte, 229 Zeichenfolgen, 270 Zeichenwechsel. Das Mittel der absoluten Werte der Abweichungen beträgt $0^m.119$. Obwohl der Stern nur schwach gefärbt ist ($2^c.52$), scheint ein Einfluss des Mondes auf die Beobachtungen nachweisbar zu sein. Es verteilen sich auf 249 bei Mondschein angestellte Beobachtungen die Abweichungen wie folgt: 117 Pluszeichen, 76 Minuszeichen, 56 Nullwerte.

Ich halte aber bei der ziemlich grossen Zahl der Nullwerte (21 % aller

TABELLE I. Vergleichsterne.

	<i>BD</i>	HAGEN	St.	<i>HA</i> 29	<i>HA</i> 74	<i>HA</i> 91	<i>PD</i>	<i>PD red.</i>	<i>H</i>
<i>C</i>	+34.469	1	64.6	^m 5.40	—	^m 5.62 Mb	^m 5.61 RG—	^m 5.70?	^m 5.39
<i>B</i>	33.454	2	58.8	5.71	^m 5.85	5.90 G5	5.91 WG	5.82	6.00
<i>A</i>	33.461	3	53.1	6.59	—	6.92 Ko	6.83 WG	6.74	6.62
<i>a</i>	34.471	4	49.0	6.46	6.68	6.76 A5	7.02 W+	6.69	7.05
<i>b</i>	33.481	5	44.3	—	—	7.75 G5	7.88 WG	7.80	7.56
<i>c</i>	33.476	8	39.7	—	8.10	— F5	—	—	8.05
<i>d</i>	33.466	12	34.0	8.91	—	— K2	—	—	8.66
<i>e</i>	34.467	14	30.0	—	—	— A2	—	—	9.09
<i>f</i>	33.468	17	26.5	[10.23]	9.44	—	—	—	9.46
<i>g</i>	33.467	18	21.7 ^s	[10.61]	—	—	—	—	9.96
<i>h</i>	—	24	18.7	—	—	—	—	—	10.29
<i>j</i>	—	28	15.4	—	—	—	—	—	10.64
<i>k</i>	—	32	12.8	—	—	—	—	—	10.92
<i>l</i>	—	35	10.2	—	—	—	—	—	11.19
<i>m</i>	—	37	8.4	—	—	—	—	—	11.39
<i>n</i>	—	39	5.8	—	11.51	—	—	—	11.66
<i>p</i>	—	43	3.3	—	12.14	—	—	—	11.92
<i>q</i>	—	46	0.0	—	12.48	—	—	—	12.27

TABELLE IIa. Farbenschätzung.

Zeitraum	<i>m</i>	
2417144—7452	18	^c 2.25
7475—7812	18	2.28
7823—8315	18	2.58
8325—9066	18	2.08
9076—9871	17	2.65
2420144—2788	17	3.00
3052—6287	17	2.82
	123	2.52

TABELLE IIb. Farbenschätzung.

Grösse	<i>m</i>	
^m 5.37	12	^c 3.00
5.85	13	2.77
6.14	13	2.58
6.39	13	2.38
6.59	13	2.47
6.86	12	2.33
7.11	12	2.25
7.76	12	1.87
8.42	12	2.00
9.90	11	3.64
	123	2 53

TABELLE III.

Minima <i>m</i>						Maxima <i>M</i>				
<i>E</i>	<i>B</i>	<i>v</i>	<i>R</i>	<i>B-R</i>	<i>B-F</i>	<i>B</i>	<i>v</i>	<i>R</i>	<i>B-R</i>	<i>B-F</i>
- 17	—	—	—	—	—	²⁴¹ 6966	6.6	6968	- 2	+ 2
- 16	²⁴¹ 7101	^m 12.0	7112	- 11	- 5	7233	6.1	7233	0	+ 6
- 15	—	—	—	—	—	7495	5.7	7498	- 3	+ 5
- 14	7633	11.6	7642	- 9	+ 2	7755	6.1	7763	- 8	+ 3
- 13	7888	11.3	7907	- 19	- 7	8020	5.5	8028	- 8	+ 4
- 12	8161	12.1	8172	- 11	+ 2	8285	6.7	8293	- 8	+ 5
- 11	8425	12.0	8437	- 12	+ 2	8536	6.0	8558	- 22	- 8
- 10	8691	11.2	8702	- 11	+ 4	8804	5.9	8823	- 19	- 4
- 9	8954	11.0	8967	- 13	+ 2	9064	5.3	9088	- 24	- 9
- 8	9216	11.2	9232	- 16	- 1	9329	5.5	9353	- 24	- 9
- 7	9485	11.6	9497	- 12	+ 2	9599	6.3	9618	- 19	- 5
- 6	9745	11.2	9762	- 17	- 4	9869	5.1	9883	- 14	- 1
- 5	²⁴² 0010	12.2	0027	- 17	- 5	²⁴² 0136	6.7	0148	- 12	0
- 4	—	—	—	—	—	0398	6.6	0413	- 15	- 4
- 3	0550	11.3	0557	- 7	+ 1	—	—	—	—	—
- 2	0805	10.8	0822	- 17	- 11	0931	5.4	0943	- 12	- 6
- 1	1092	12.1	1087	+ 5	+ 9	1210	7.1	1208	+ 2	+ 6
0	—	—	—	—	—	1480	5.9	1473	+ 7	+ 8
+ 1	1615	11.5	1617	- 2	- 3	1732	6.3	1738	- 6	- 7
+ 2	1884	11.1	1882	+ 2	- 2	2002	5.2	2003	- 1	- 4
+ 3	2153	11.8	2147	+ 6	0	2270	5.9	2 68	+ 2	- 4
+ 4	2413	11.3	2412	+ 1	- 7	2547	5.9	2533	+ 14	+ 6
+ 5	2685	11.3	2677	+ 8	- 2	2801	5.2	2798	+ 3	- 7
+ 6	2955	12.1	2942	+ 13	0	3073	6.3	3063	+ 10	- 3
+ 7	—	—	—	—	—	3352	6.9	3328	+ 24	+ 10
+ 8	3489	11.8	3472	+ 17	+ 2	—	—	—	—	—
+ 9	3750	11.9	3737	+ 13	- 3	3880	5.6	3858	+ 22	+ 6
+ 10	4010	11.5	4002	+ 8	- 9	4140	5.0	4123	+ 17	0
+ 11	—	—	—	—	—	4405	6.0	4388	+ 17	0
+ 12	4539	11.2	4532	+ 7	+ 8	—	—	—	—	—
+ 13	4809	12.2	4797	+ 12	- 4	4942	5.7	4918	+ 24	+ 8
+ 14	5070	12.2	5062	+ 8	- 7	5195	6.0	5183	+ 12	- 3
+ 15	5346	11.8	5327	+ 19	+ 5	—	—	—	—	—
+ 16	5600	11.3	5592	+ 8	- 5	5722	5.9	5713	+ 9	- 4
+ 17	5882	11.7	5857	+ 25	+ 15	5986	6.5	5978	+ 8	- 2
+ 18	—	—	—	—	—	6264	6.1?	6243	+ 21	+ 13
+ 19	6409	12.0	6387	+ 22	+ 16	—	—	—	—	—
		11.61			± 5		5.97			± 5

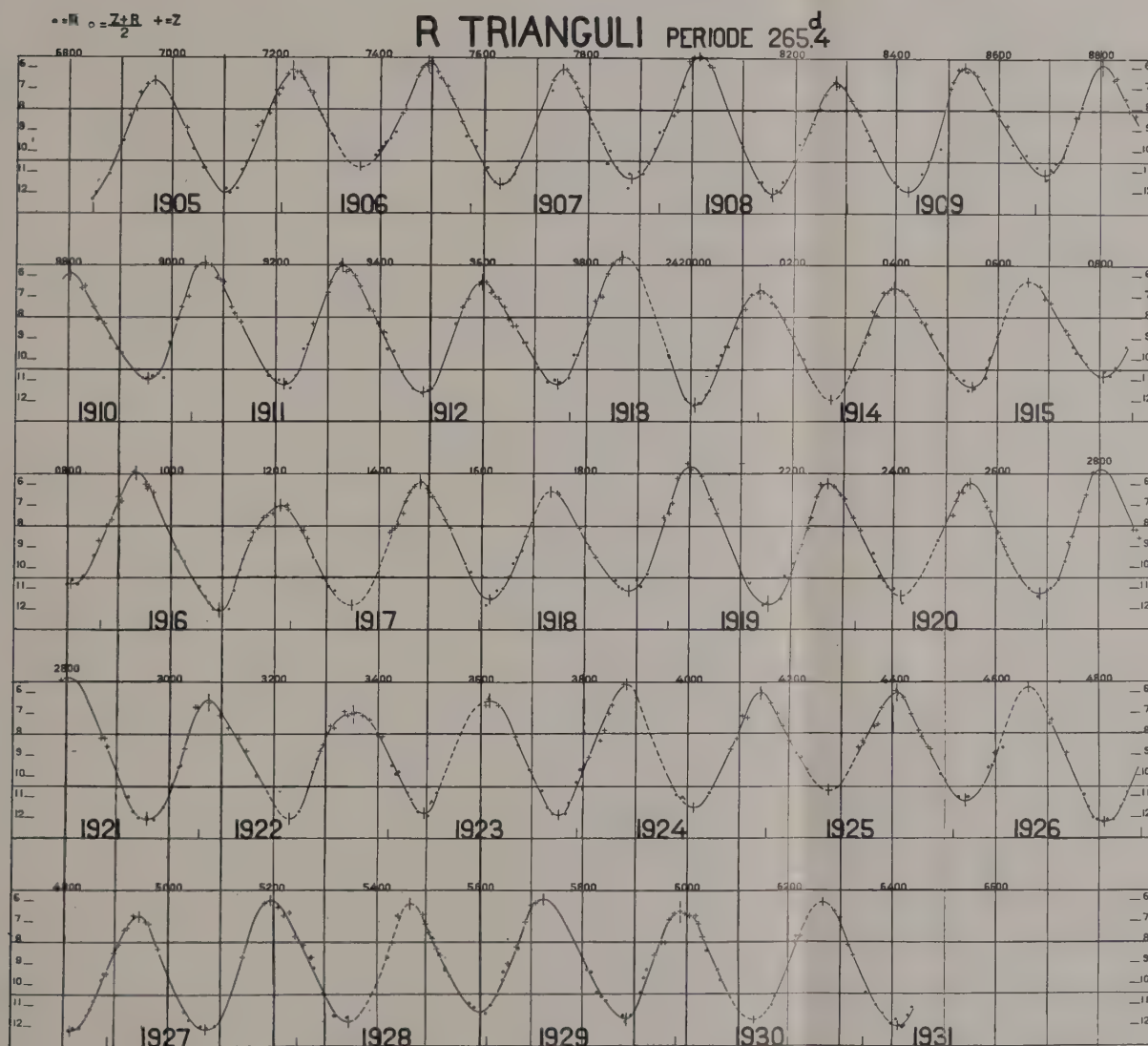


Fig. 1.

Beobachtungen) die Realität des Resultats kaum für verbürgt, zumal sich bei dem viel gelberen Stern *T Cassiopeiae* der Einfluss des Mondscheins gar nicht bemerkbar machte.

Die Tabelle III enthält die aus der Kurve abgelesenen Epochen der Minima m und der Maxima M , nebst der Vergleichung $B-R$ mit den einfachen Elementen:

$$2421352^d + 265^d.0 \text{ } E \text{ für die Minima)}$$

und

$$2421473 + 265.0 \text{ } E \text{ (für die Maxima).}$$

Die Abweichungen $B-R$ verlangen bei den Maxima offenbar ein periodisches Glied. Bei den Minima wäre auch eine Vergrößerung der Periode mit etwa $1^d.3$ möglich. Das ist natürlich an und für sich nicht sehr wahrscheinlich. Die Abweichungen bei den Minima vertragen sich aber auch ganz gut mit einem Sinusglied. Werden die Abweichungen für M und m zusammen in eine Graphik kombiniert, dann geht hieraus eine Korrektur $+ 16^d \sin 9^\circ (E - 1)$ hervor, und eine Nullpunktkorrektur von $+ 1^d$. Auf eine genauere Rechnung habe ich verzichtet. Die definitiven Elemente sind dann:

$$\begin{array}{l} \text{Minima: } 2421353^d \\ \text{Maxima: } 2421474 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 265^d.0 \text{ } E + 16^d \sin 9^\circ (E-1), \end{array} \right.$$

$$\frac{M-m}{P} = 0.457.$$

Der PRAGERSche Katalog für 1931 gibt den Periodenwert $264^d.8$, und das aus sämtlichen von mir seit dem Jahre 1905 in den *Astr. Nachr.* mitgeteilten Epochen der Minima und Maxima abgeleitete allgemeine Mittel ist $265^d.5$. Die extremen Werte des Lichtwechsels sind:

$$\text{Minimum: } v = 11^m.61 \pm 0^m.075, \quad (\text{m.F.})$$

$$\text{Maximum: } v = 5.97 \pm 0.088.$$

Die Amplitude beträgt also $5^m.64$.

Sowohl beim Minimum wie bei Maximum scheinen die Abweichungen vom Mittelwert regellos aufzutreten.

TABELLE IV. Die mittlere Kurve.

Phase	v	Phase	v	Phase	v	Phase	v
$- 70^d$	9.05^m	0^d	11.61^m	$+ 70^d$	8.29^m	$+140^d$	6.29^m
$- 60$	9.57	$+ 10$	11.53	$+ 80$	7.61	$+150$	6.73
$- 50$	10.08	$+ 20$	11.29	$+ 90$	7.00	$+160$	7.23
$- 40$	10.57	$+ 30$	10.86	$+100$	6.47	$+170$	7.75
$- 30$	10.98	$+ 40$	10.30	$+110$	6.13	$+180$	8.27
$- 20$	11.30	$+ 50$	9.65	$+120$	5.97	$+190$	8.79
$- 10$	11.53	$+ 60$	8.97	$+130$	6.05	$+200$	9.31

Auch für *R Trianguli* wurde wieder der mittlere Verlauf der Lichtkurve in der Nähe der beiden Hauptphasen durch Ablesung der Helligkeit für je 10^d abgeleitet. Die beiden Teilkurven schliessen sich fast genau an einander an (s. die Fig. 2), und geben zusammen den in der Tabelle IV mitgeteilten Verlauf der mittleren Kurve.

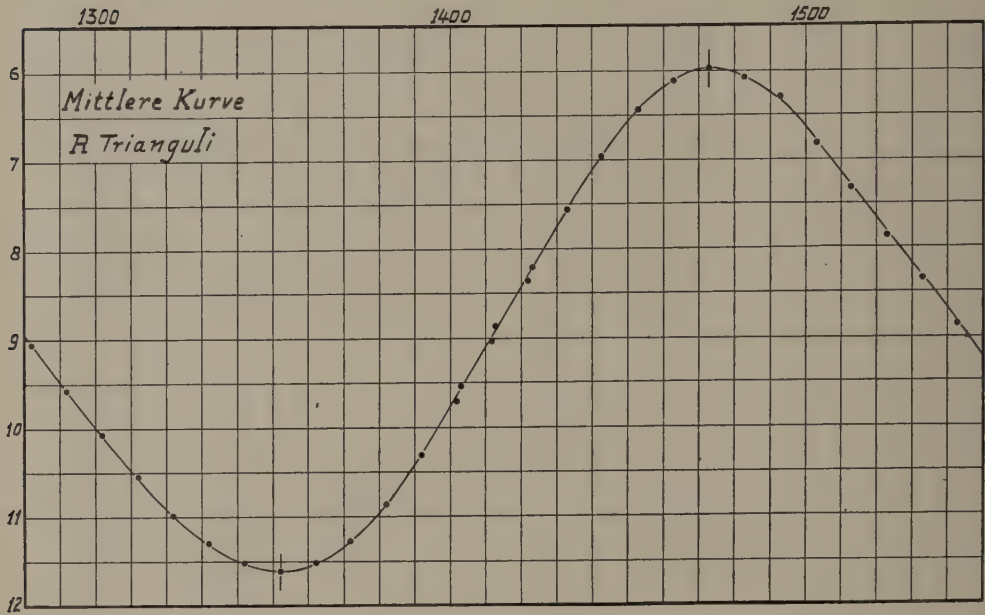


Fig. 2.

Die Streuung in der Nähe von 60^d erreicht die Werte:

	<i>m</i>	<i>M</i>	Mittel
im aufsteigenden Aste:	0.320	0.365	0.343
im absteigenden Aste:	0.279	0.278	0.279
Mittel:	0.300	0.322	

Die Streuung ist also wieder grösser beim Maximum, und grösser im aufsteigenden Aste. Das Verhältnis der Streuungen $0^m.343$ und $0^m.279$ ist 1.23, das Verhältnis der Geschwindigkeiten des Lichtwechsels bei Auf- und Abstieg 1.19^1).

Zusammenfassung.

Aus 671, in den Jahren 1905 bis 1931 (2416845 bis 2426436) ange-

¹⁾ Bei W. HERCULIS (Proc. 33, 118) sollten die betreffenden Zahlen 1.13 und 1.15, statt 0.113 und 0.115 lauten.

stellten, Beobachtungen von *R Trianguli* sind die folgenden Elemente des Lichtwechsels abgeleitet worden :

$$\begin{array}{lcl} \text{Minimum : } 2421353^{\text{d}} & \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Minimum : } 2421353^{\text{d}} \\ \text{Maximum : } 2421474 \end{array}} \right\} + 265^{\text{d}}.0 E + 16^{\text{d}} \sin 9^{\circ} (E-1); & \begin{array}{l} v = 11^{\text{m}}.61 \\ v = 5.97 \end{array} \\ \text{Maximum : } 2421474 & & \hline \text{Amplitude} & = & 5.64 \end{array}$$

woraus

$$\frac{M-m}{P} = 0.457.$$

Die mittlere Lichtkurve hat einen vollkommen glatten Verlauf.

Utrecht, Mai 1931.

Physics. -- *On the Crystal Structure of Methane.* II. By H. H. MOOY. Communication N^o. 216a from the Physical Laboratory at Leiden). (Communicated by Prof. W. H. KEESOM).

(Communicated at the meeting of May 29, 1931.)

§ 1. *Introduction.* In a former communication¹⁾ we stated that solid methane has a cubic close-packed structure, side of the elementary cube at 20.5° K. 5.89 A.U.

We have now made an attempt to determine the spacegroup of this structure and the distance C-H in the methane molecule.

If we consider the four carbon atoms in the elementary cube to be crystallographically identical, and if we make the same assumption regarding the sixteen hydrogen atoms, then the only possible space-groups are T^2 and T_d^2). In both groups the coordinates of the carbon atoms are: 000, $\frac{1}{2}\frac{1}{2}0$, $\frac{1}{2}0\frac{1}{2}$, $0\frac{1}{2}\frac{1}{2}$ and those of the hydrogen atoms uuu , $u\bar{u}\bar{u}$, $\bar{u}u\bar{u}$, $\bar{u}\bar{u}u$, (fz).

For the methane molecule a tetrahedral as well as a pyramidal model has been proposed³⁾.

It is remarkable that (with the assumption of crystallographical identity) the tetrahedral structure follows directly from the geometrical structure theory.

We may mention here that TELLER and TISZA⁴⁾ recently solved the difficulty that the different moments of inertia of the methane molecule, resulting from the infra-red band analysis of methane⁵⁾, could not be explained with the tetrahedral model on a quantum-mechanical basis⁶⁾.

The values of ν coincide, except for planes ($pq0$) and (pqr), for which the values are $\nu=12$ and $\nu=24$ respectively in the case of T^2 and $\nu=24$, and $\nu=48$ respectively in the case of T_d^2 .

§ 2. *Experiments and calculations.* With the films described previously¹⁾ we were not sure about the intensities of the reflexions (220) and (400), as the corresponding lines coincided with lines from the copper rod. Therefore we made two exposures at 20.5° K where methane was solidified

1) These Proceedings 34, 550, 1931. Comm. Leiden N^o. 213d.

2) Cf. Tables of MARK-ROSDAID.

3) For a survey of the reasons in favour of the pyramidal model see V. HENRI, Chem. Rev. 4, 189, 1927; for those in favour of the tetrahedral model G. GLOCKLER, J. Amer. Chem. Soc. 48, 2021, 1926. Further literature references concerning this question: K. LONSDALE, Phil. Mag. 6, 433, 1928, and J. K. MORSE, Proc. Nat. Acad. Sc. 14, 166, 1928

4) E. TELLER und L. TISZA, Phys. Zs. 32, 219, 1931.

5) J. P. COOLEY, Astrophys. Journ. 42, 73, 1925.

6) W. ELERT, Zs. f. Ph. 51, 6, 1928.

Intensities for various parameter values.								
<i>h k l</i>	<i>Q</i>	<i>v</i>	Intensity calculated, relative to (111) reflexion					Intensity observed
			<i>u</i> = 0	<i>u</i> = 0.08	<i>u</i> = 0.09	<i>u</i> = 0.10	<i>u</i> = 0.13	
111	34.8	8	150	150	150	150	150	150
200	26.5	6	86	75 ⁵	72	67 ⁵	46 ⁵	70
220	12.0	12	78	52 ⁵	49 ⁵	47	50	50
311	8.2	24	106	55 ⁵	50	45 ⁵	43	50
222	6.7	8	29	19 ⁵	20	21 ⁵	27	18
400	5.1	6	16 ⁵	4	3	2	1	4
331	4.2	24	54 ⁵	28	31	36	58 ⁵	30
420	3.8	12	24 ⁵	8.4	8.5	9	17	25
		or	or	or	or	or	or	
		24	49	16 ⁸	17	18	34	
422	3.1	24	40	19 ⁵	21	22	26	25
333 } 511 }	2.9	8	50	15	14 ⁵	15	27	20
	2.9	24						
440	2.8	12	18	11	15	20	32	14
531	2.7	24	35	17	20	26	36	35
		or	or	or	or	or	or	
		48	70	34	40	52	72	
600 } 442 }	2.7	6	44	22 ⁵	25	26	30	20
	2.7	24						

upon a silver rod. The thickness of the layer was 0.45 mm, both films were very clear and showed intense lines (about 1000 mA minutes, 26 kV). We used them to make a more differentiated estimation of the relative intensities.

The intensities to be expected theoretically were calculated with the usual formula :

$$I_h \sim \frac{1 + \cos^2 2\vartheta}{\sin^2 \vartheta \cos \vartheta} \cdot v_h \cdot |S_h|^2 = Q(\vartheta)_h \cdot v_h \cdot |S_h|^2$$

They have been evaluated for the values of *u*: 0, 0.08, 0.09, 0.10, 0.13.

§ 3. *Results.* Comparison of the observed intensities with the calculated ones shows that a rather satisfying agreement is obtained for values of *u*

of about 0.1. The value 0.09 seems to be the best, but an accurate determination of this parameter is impossible from our data for the following reasons. In the intensity formula mentioned above several factors have been omitted (DEBIJE-WALLER etc.), partly because they are not known exactly. It is generally assumed that they would give a very gradual change of the intensity as a function of the glancing angle. As regards the influence of the absorption in the sample we believe (under special circumstances) the assumption just mentioned not to be valid.

The value $u = 0.09$ corresponds to a distance C-H : 0.09 A.U., whereas from the moment of inertia $5.66 \cdot 10^{-40}$ given by the infra-red band analysis follows C-H = 1.13 A.U. This suggests that the distance C-H is a bit smaller in the crystal phase than it is in the gas phase¹⁾.

In view of the observed intensities of the reflexions (420) and (531) one may conclude that the space-group of the structure is T_d^2 .

I want to express my gratitude to Prof. Dr. W. H. KEESOM for the opportunity to carry out these investigations and for his continued interest during their course.

With pleasure I thank cand. phil. J. W. L. KÖHLER for his valuable help with the intensity calculations.

¹⁾ From the vapour pressure curve may be deduced C-H = 1.00 A. U ; see K. F. HERZFELD, Hdb. d. Physik 22, p. 479.

Physics.— *A complete arrangement for the investigation, the measurement and the recording of rapid airspeed fluctuations with very thin and short hot wires.* By M. ZIEGLER. (Mededeeling No. 21 uit het Laboratorium voor Aero- en Hydrodynamica der Technische Hoogeschool te Delft.) (Communicated by Prof. J. M. BURGERS.)

(Communicated at the meeting of May 30, 1931.)

In Mededeeling N^o. 20 from this Laboratory the conditions were indicated which must be satisfied by a hot wire anemometer for the study of the turbulent boundary layer. The theoretical considerations about the lag of hot wires were confirmed by the experimental results, and an arrangement was given, which makes it possible to compensate very easily the difference in sensitivity for slow and rapid fluctuations, so that a constant sensitivity can be obtained up till arbitrary high frequencies.¹⁾

This compensation, however, and the requirement that the wires must be as short as possible (shorter than 1 mm), cause a considerable decrease of the sensitivity of the hot wire and thus make a great amplification necessary. The purpose of the present communication is to give a description of the arrangement which is used now at this laboratory for the investigation mentioned.

The hot wires.

The hot wires are platinum wires of 0,003 or 0,005 mm diameter, and of a maximum length of 1 mm. These wires are obtained in the following way. To the two thin needles of a hot wire holder are soldered the ends of a piece of Wollaston wire bent in *U*-shape.²⁾ Then the middle part of the Wollaston wire is pinched in the form of a little loop, the top of which is immersed in nitric acid. The silver mantle here dissolves and the thin platinum core remains. Through a microscope it is possible to see how far the loop reaches into the acid and to control the progress of the process. Owing to capillary action the acid comes in contact with the wire in such a manner that the silver which remains unattacked ends into two pretty sharp points. When all the silver at the top is dissolved, the platinum wire must be stretched very carefully by means of an adjusting screw provided at the holder for that purpose. The two silver

¹⁾ M. ZIEGLER, These Proceedings, **33**, p. 723, 1930. The application of the hot-wire anemometer for the investigation of the turbulence of an airstream.

²⁾ The Wollaston wire used is supplied by HARTMANN and BRAUN A. G. Frankfurt am Main.

threads between which the platinum wire is stretched, although fairly thin themselves (about 0.15 to 0.25 mm) are more than rigid enough as carriers of the platinum wire. The photos of fig. 1 and 2 show such a 0.005 mm platinum wire and its holder. It may be safely assumed that a hot wire anemometer of such a type will cause a minimum of disturbance in the phenomena to be investigated.

It is desirable to have the holders already fixed in the position they will occupy during the experiments, before the silver mantle of the wire is dissolved, as the smallest shock on the holder usually causes the rupture of the wire. The investigation of the turbulent boundary layer happens in the smaller windchannel of the laboratory along a smooth glass plate of 50 cm breadth and 2,30 m length, placed horizontally at 15 cm above the under side of the working section of the tunnel, the dimensions of which are $50 \times 50 \times 260$ cm. The leading edge of the plate is provided with a metallic nose, which ends very sharply and fits quite smoothly to the glass plate, owing to an accurate stopping with paraffine wax. The upper side of the nose is horizontal, while the under side reaches the glass plate under an obtuse angle. Two hot wire holders are fixed to micrometer screws which are mounted above the working section, and by mean of which the wires can be brought very accurately at different distances from the plate. This vertical motion is also very convenient during the preparation of the wire for the judicious adjustment of the depth of immersion into the nitric acid. The micrometer screws themselves can be moved in two horizontal directions so that the wires can be placed at various positions, both in regard to the plate and to themselves. As all electric measurements and records are made in another room, connecting lines are provided from each wire to its respective measuring set.

Wheatstone bridge arrangement.

Though for the observation and recording of airspeed fluctuations it is sufficient to amplify the modifications of the electric tension between the ends of the hot wires, and one could do with a heating battery and a series resistance only, it is customary to connect each wire to a Wheatstone bridge arrangement. (See the wiring diagram, fig. 3). This is very convenient for the determination of the resistance (temperature) of the wire and for adjusting a suitable heating current, and besides is necessary for various tests which will be described in the following pages. Suitable values of the bridge resistances are indicated in the diagram. The resistance of a 0.005 mm hot wire of less than 1 mm in working conditions, can be for example about 20 ohms, the heating current being about 50 mA. The potential differences between the points A_1 and A_2 are led to the grid of the first amplifier tube via the compensating circuit. It is of great importance that the resistance between A_1 and A_2 should be low in view of parasitic disturbances which generally would become

M. ZIEGLER: A COMPLETE ARRANGEMENT FOR THE INVESTIGATION
 OF THE MEASUREMENT AND THE RECORDING OF RAPID AIRSPEED
 FLUCTUATIONS WITH VERY THIN AND SHORT HOT WIRES.



Fig. 1.

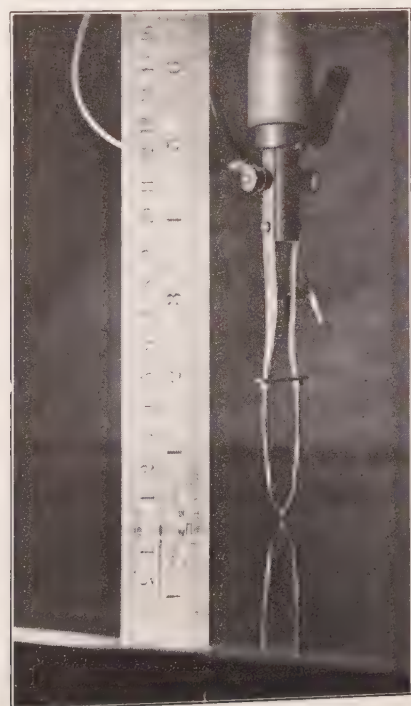


Fig. 2.

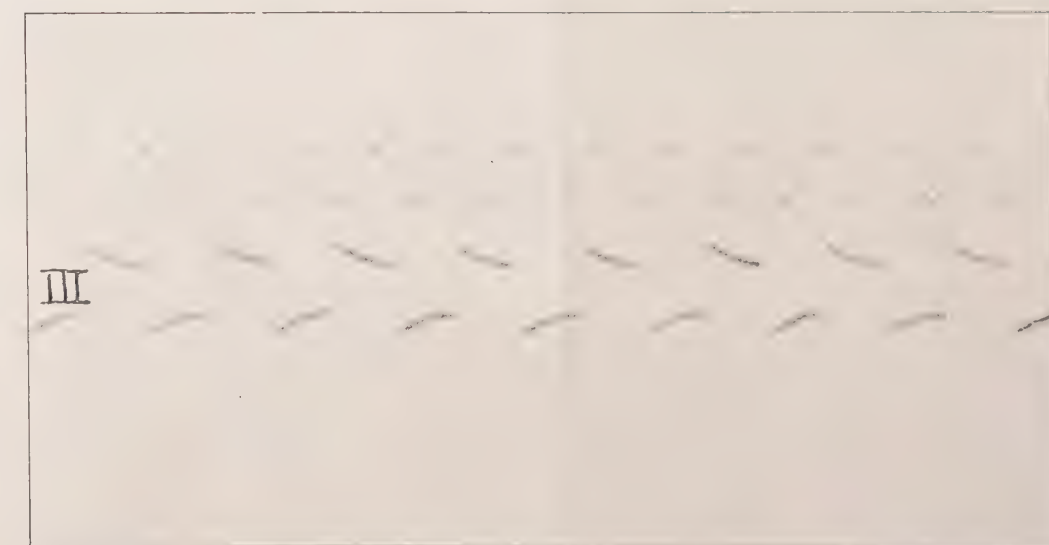
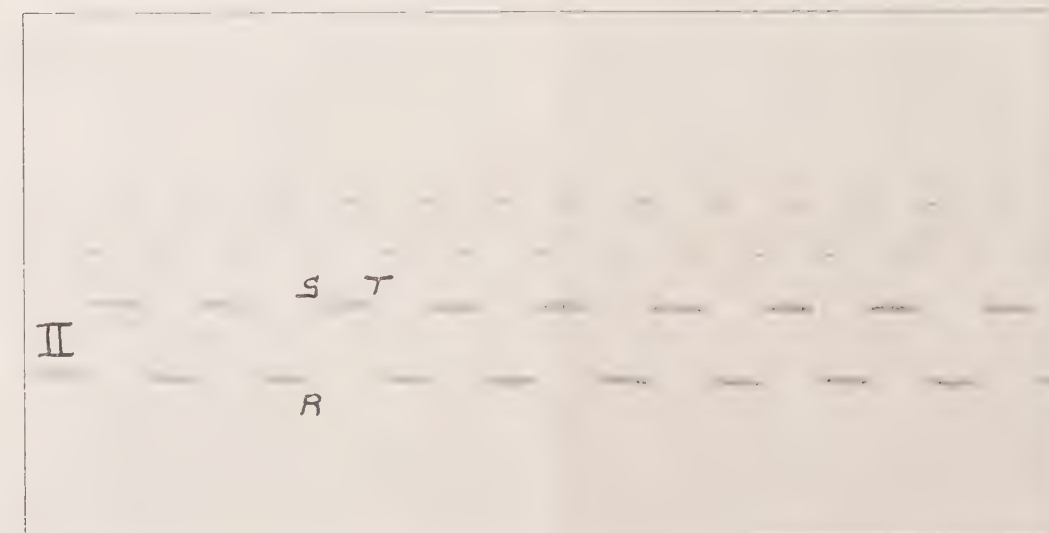


Fig. 4.

much stronger when using a high input resistance, and also with regard to the stability of the amplifier which depends principally on the reaction of the last stage on the input arrangement.

Compensating circuit and amplifier.

Two amplifiers are in use at present. Connected respectively to two hot wires they enable the recording of simultaneous fluctuations at two different points. Every amplifier is mounted in a red copper box which contains also, at the input side, the compensating circuit. The wire wound variable resistances R_1 and R_2 are of the type which is commonly used for radio purposes. By disconnecting the condenser C , which can be done with the interruptor I , the compensating effect of the arrangement can be annihilated.

There are 5 amplifying stages, with resistance coupling, which are shielded mutually by four copper partitions. The last stage is fed quite separately — it has even a separate heating current battery — as otherwise it proved to be very difficult to eliminate reactive effects when using the greatest amplification. The same storage batteries can provide, however, the filament heating current for both amplifiers.

When using PHILIPS A 425 as end tube, the maximum voltage amplification is more than 10^6 times. When using two B 405 tubes connected parallel in the end stage, the greatest current amplification of the whole amplifier is about 30 mA per 0,1 millivolt. The amplification is practically constant for frequencies from 1 up to 10,000 periods per sec. The time constant of the amplifier can be made still greater by using grid leak resistances of a few megohms for example. This, however, has various practical inconveniences, while on the other hand the necessity of amplifying fluctuations of longer periods than $\frac{1}{5}$ sec for example has not presented itself till now. By means of switches and interruptors, one can use 3, 4, or 5 stages as required; besides the total amplification can be controlled by means of the potentiometer P_C in the grid circuit of the fourth stage. In the plate circuit of the last stage an arrangement is indicated by means of which it is possible, without using any separate battery, to balance the direct current, which would flow through the oscillograph system 0. This is necessary when working with sensitive oscillograph systems which can stand only a few mA, less thus than the normal plate current of a triode.

Observing and Recording Apparatus.

The character of the airstream in the first place can be investigated auditively by means of an electro-dynamic loudspeaker. The irregular fluctuations in the boundary layer for example cause a flopping and clapping noise, which reminds somewhat the atmospheric parasites in radio reception. In the second place the progress and the form of the fluctuations can be observed visually by means of the ordinary oscillograph, using a

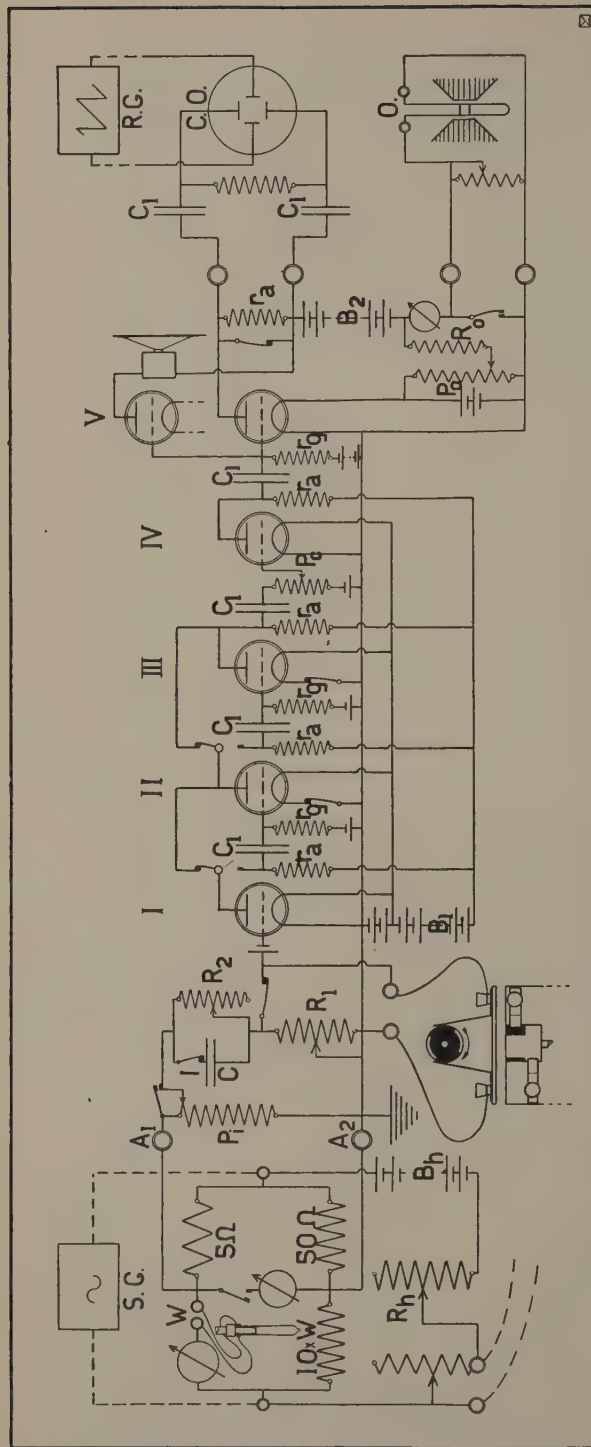


Fig. 3. Wiring diagram of the complete arrangement.

S. G. Generator of sinusoidal tension of variable frequency.

W. Hot wire.

R_h Resistance of the heating circuit. The value of it depends on the wire used and on the tension of the heating battery.

B_h Heating battery (100 V. or less)

P_i Input potentiometer of the amplifier.

C. Fixed condenser of 0.05 MF.

R_1 Variable resistance 0—2500 Ohm.

R_2 " " 0—25000 Ohm.

r_g Anode circuit resistance 200,000 Ohm.

r_g Grid leak 0.5 Megohm.

C_1 Coupling condenser 8 MF.

P_c Volume control potentiometer 0—700,000 Ohm.

B_1 Dry cell battery of 200 V.

B_2 Accumulator battery of 200 V.

P_0 Potentiometer 200 Ohm.

R_0 Resistance 100 Ohm.

O. Electro magnetic oscillograph.

C.O. Cathode ray oscillograph.

R.G. Generator of relaxation oscillations of variable frequency.

In the stages I, II, III and IV A 125 tubes are used. In the last stage various types of valves may be used.

For the indicated position of the switches in the plate circuits of I and II (position for 3 stage amplification), the heating current of I and II ought to be interrupted. When 4- or 5 stage amplification is required, the switches mentioned have to be switched on.

rotating mirror or lensbarrel. For this purpose mostly a cathode ray oscillograph is used, which would, eventually, enable also the recording of the observed phenomena¹). A rotating mirror is made superfluous by an arrangement, commonly used in many laboratories. The cathode ray oscillograph tube has two sets of plates: one set causes the vertical deflection of the spot, the other the horizontal deflection. On the latter set of plates is put a potential difference which increases linearly with time up to a certain maximum value, and then suddenly returns to its original value, from which it increases again. The apparatus which gives this fluctuating tension is composed in principle of a condensor which is shunted by a gas filled tube (a neon tube) and is gradually charged up by a battery through a high resistance. When the ignition potential of the tube is reached, the tube flashes, the condensor suddenly discharges through it and its potential falls to such a value that the discharge ends. At this moment the process starts again repeating itself indefinitely. The frequency is proportional to RC , R being the value of the resistance and C the capacity of the condensor, and the adjustment to an arbitrary value thus is very easy. The electric tension to be investigated is put on the plates which cause the vertical deflection. When this tension is periodic, the curve on the oscillograph will stand still if the frequency of the horizontal deflection is the same as the frequency of the periodic phenomenon or equal to a subharmonic of it.

The arrangement described allows the observation of much higher frequencies than can be done with a rotating mirror. The cathode ray oscillograph can be used in various circumstances; the fact that its use does not present any danger for itself and that the deflections or curves can be observed from a certain distance even at daylight makes it a very useful instrument.

In order to analyze the fine structure of the complicated airspeed fluctuations in the turbulent boundary layer, it proved to be necessary to take records on rapidly moving sensitive paper or film. The optical arrangement and the recording camera which are used here with the normal SIEMENS oscillograph make it possible to take fair records without difficulty on sensitive paper moving with velocities up to 1,50 m per sec.

Calibration of the entire arrangement.

Though the behaviour of the apparatus remains fairly constant for a given adjustment during a rather long time, it is impossible to calibrate the whole arrangement once for all in consequence of the many varying elements present in it. The hot wires themselves are the most important sources of change as they break frequently and then have to be replaced, but battery tensions, vacuum tube characteristics, oscillograph oil qualities etc., also must be mentioned. Hence it is necessary to dispose of a simple

¹) This cathode ray oscillograph, of the ordinary laboratory type, is supplied by MANFRED VON ARDENNE's Research Laboratory, Berlin.

method by means of which it is possible, for each series of records, to determine easily and accurately, which oscillograph deflection corresponds to a velocity variation of given value.

Before performing the calibration, the variation of the sensitivity as a function of the frequency of sinusoidal fluctuations must be investigated in order to make it independent of the frequency, at least within a certain range, by means of the compensating circuit. For this detail the reader is referred to the paper mentioned, which contains a full description of the frequency calibration.

Air flow velocities in the wind channel are measured with Pitot tube and micromanometer, and all hot wire anemometers originally must be calibrated against them. Keeping the heating current constant, it is possible for a series of airspeeds either to measure the resistance of the hot wire (the potential difference between its extremities) or to determine the values of the current which, for a given bridge arrangement, flows through the galvanometer connected in series with a known resistance. The latter method would give the direct tension existing at each airspeed between the points A_1 and A_2 . The amplifier, however, though amplifying still very slow fluctuations, does not reproduce differences of direct current. Hence it would be necessary, each time to calculate the magnitude of the variations of the velocity from the oscillograph deflections, taking account of the adjustment of the compensator, the amplifying factor of the amplifier for the position of the volume control during the experiment and the sensitivity of the oscillograph. It would be much easier therefore when we could succeed in making airspeed fluctuations of known magnitude and see directly which oscillograph deviations would result. Nevertheless this is not possible in practice; the following method, however, which is very simple may be used.

Each permanent deviation ΔV of the air velocity from the value V for which the bridge has been equilibrated, provokes a potential difference E between the points A_1 and A_2 and thus also one on the resistance R_1 of the compensating circuit equal to $e = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E$. This direct tension

e, by which the potential of the grid of the first amplifier tube is changed, is just equal to the sensitivity of the compensated hot wire without amplifier for that constant velocity change V and thus also for fluctuations of the same amplitude. Periodic shortcircuiting of R_1 will provoke input tension variations of magnitude e , and thus, via the amplifier corresponding oscillograph deviations which, on account of their rectangular form, give two light spots on a screen, the distance of which is equal to the sensitivity of the whole arrangement for velocity variations of magnitude ΔV .

The periodic short circuiting of R_1 occurs by means of a rotating ebonite cylinder, mounted on the axis of a small electromotor and fitted with brass contact strips which periodically connect two red copper brushes pressing against the cylinder. The use of carbon brushes must be avoided in our

case, in regard of the contact potential between brass and carbon, which cannot be neglected here.

The calibration of the arrangement now cannot be more simple. The motor of the periodic interruptor is switched in, the hot wire being in a steady flow of the same velocity as that used in the experiments. If the bridge was not balanced correctly this causes a deflection of the oscillograph. Observation of this deflection makes it easy to adjust the exact equilibrium. The bridge galvanometer thus becomes superfluous. *Then it is only necessary to bring the velocity of the airflow in the channel at some other values, to be measured with Pitot tube and micromanometer, and to read the corresponding oscillograph deviations or to record them, if required, on sensitive paper.*

It will occur sometimes that the mean velocity of the turbulent flow which must be investigated will be different from the velocity in the undisturbed region, or that the fluctuations have an assymetric character which makes it practically impossible to determine the zero line on the oscillogram. In this case it would be impossible to read in the oscillogram the absolute value of the velocity at any instant. This inconvenience can be avoided in the following way. The bridge is balanced and the calibration effected when the hot wire is in a steady flow of known velocity; then without changing the adjustment the wire is brought in regions of unknown mean velocity, where the flow may be either steady or turbulent. Periodic shortcircuiting of R_1 will now cause oscillograph deflections which for each case, all will reach the line of the original velocity V , the zero line of the calibration. *The distance between a certain point of the recorded curve and this line, indicates how much, at any instant, at the place of the hot wire, the velocity differs from the known velocity V of the undisturbed airflow.*

All the preceding considerations principally had in view the investigation of velocity fluctuations, which are not too small compared with the mean velocity, and no attention was given to the fluctuations which are still present in the steady airflow of the best wind channel¹). Compared with the fluctuations in the turbulent boundary layer the latter entirely can be neglected in our case. When on the other hand especially these small airspeed fluctuations of the free stream are to be investigated and measured, the calibration of the arrangement can be performed in quite the same way as is described above, with an amplification which does not yet show the disturbances which must be studied. If then, for the investigation, the amplification must become n times larger, the sensitivity will be n times the value which is given by the tangent at the point of the calibration curve corresponding to the mean velocity in the investigated region.

¹) Comp. f.i. J. M. BURGERS, These Proceedings 29, p. 547, 1926. Experiments on the fluctuations of the velocity in a current of air.

The reproduction of „rectangular” velocity fluctuations.

A good check on the behaviour of the anemometer arrangement would be the reproduction of sharp edged velocity fluctuations of known type, for example of rectangular form. Indeed when an uncompensated hot wire is mounted in an air current which shows rectangular velocity fluctuations of short period, the reproduction will generally depart considerably from the original form, owing to the lag of the hot wire. The temperature T of the wire each time approaches to the equilibrium value corresponding with the new velocity according to the equation:

$$T - T_2 = (T_1 - T_2)e^{-\lambda t},$$

where T_1 and T_2 are resp. the original and the final temperature, and λ is a factor dependent on the dimensions, etc. of the hot wire ¹⁾. Hence T will reach its final value only if the new velocity remains constant long enough. When the period of the fluctuations is not great compared with the time constant $1/\lambda$ of the wire, the temperature will change again in the opposite direction already before the state of equilibrium will have been reached.

If the compensation is efficacious, the influence of the lag must be eliminated, and the reproduction must show a fair approximation of the rectangular form.

It has been mentioned already that the behaviour of a wire with regard to its lag can be estimated by studying the influence of heating current fluctuations in stead of that of airspeed fluctuations ²⁾. This circumstance may be used also in the present case.

By means of the rotating interruptor it is possible periodically to short circuit a resistance in series with the heating current battery and thus to vary periodically the current from the value i to the value $i + \Delta i$. The change of temperature of the wire will then be approximately the same as that caused by rectangular velocity fluctuations and the lag will show it self in the same manner.

A picture of this effect is given by the first oscillogram of fig. 4 obtained with a platina iridium hot wire of 0,015 mm diameter. A rather thick wire has been taken for these records, as in that case the lag is much greater than with the thinner wires used for boundary layer work. The points A_1 and A_2 were connected directly with the first amplifier tube. For an air velocity of about 10 m. per sec the heating current was brought periodically from the value 0,220 A for which the bridge was equilibrated, to 0,195 A. The peculiar sharp peak which is formed at one side is an effect of the second order inherent to the experiment. At the point P of the oscillogram the wire through which then flows a current of 0,195 A, has obtained a certain temperature and thus presents a certain

¹⁾ For the signification of λ , see the publication mentioned at the preceding page.

²⁾ See Mededeeling 20.

resistance for which the bridge is no more balanced. When now suddenly the current increases, the resistance of the wire first remains the same, and the tension between A_1 and A_2 , which, for given values of the bridge resistances is proportional to the current, increases also suddenly. From the point Q the ordinary curve of temperature variation of the wire begins again.

The next oscillogram is taken in the same circumstances but after insertion of the compensating circuit which made necessary a much greater amplification as the loss of sensitivity by compensation is greater of course for thick wires than for the thin wires generally used when the same frequency characteristic is required. Some parasites are the cause of the small deviations from the smooth line.

By observing these curves with the aid of the oscillograph it is possible to find the adjustment of the compensating circuit which gives quite the same sensitivity for the slowest and for the most rapid fluctuations¹⁾. Taking provisionally R_2 very great it is seen that upon diminishing the value of R_1 , the line RS becomes more and more steep, hence the arrangement less and less slow, but the larger must be the total amplification. This gives a practical limit for compensation. Then R_2 must be given such a value that the line ST is horizontal (oscillogram II). If its value is too high the picture of oscillogram III is obtained. The wire then is "over compensated". On the other hand when it is too low the picture obtained is more and more like oscillogram I. By pushing out the interruptor I, the compensation is eliminated but the sensitivity for the lower frequencies remains the same. If the period of the heating current fluctuations is long enough in order that the resistance of the wire each time reaches a constant value, the curve which we observe has a horizontal part (the time constant of the amplifier is still much longer and does not cause any declination of the line). Connecting again the condensor has the effect that the first part of the curve becomes much steeper and thus much sooner reaches the horizontal line. The inclination of this part of the curve gives an idea of the remaining lag of the arrangement.

It is thus possible, without using a generator as described in Mededeeling 20, to make a hot wire anemometer suitable, with a fairly great accuracy, to the exact reproduction of air velocity fluctuations with components of very different frequencies.

Moreover, if one has ascertained that an air velocity variation of value ΔV causes the same resistance change of the wire as the current variation Δi which was used in the experiments, the deviation of the oscillograph — here again, owing to the compensation, visible in the form of two light spots on a screen — at the same time gives the sensitivity of the whole arrangement for that airspeed variation ΔV . This method

¹⁾ It is advisable to observe the curves on the oscillograph used for recording, as then the frequency characteristic of the oscillograph itself automatically is taken in consideration when adjusting the compensating circuit.

of calibration is almost as simple as that which is described above; now, however, for each variation of velocity, it is necessary to determine *each time again* the value of the resistance in the heating current circuit which has to be short circuited.

Phase.

The fact that, by using the compensating circuit, the rectangular form reappears in the experiment described proves in it self that the relative phases of the different components have got the original values again. This fact was confirmed by a separate investigation executed with a 0,015 mm wire by means of the cathode ray oscillograph.

For this experiment the horizontal deflections of the cathode ray were derived from the sinusoidal voltage given by the generator described in the preceding communication. The plates of the oscillograph which cause the vertical deflection of the spot were connected to the output of the amplifier while through the bridge an alternating current was sent, given by the same generator and in phase with the tension which caused the horizontal deflections. It appeared that when the compensator was put out of circuit, the vertical deviations, which correspond to the temperature fluctuations of the wire, show an appreciable retardation in phase compared with the tension taken directly from the generator, i.e. compared with the current by which these temperature variations are caused. When the frequency of the generated sinusoidal tension is increased e.g. from 20 periods per sec upwards, and the output amplitude of the amplifier is kept constant at the proper value by means of the volume control, the narrow ellips which is already to be seen at the lowest frequencies. changes gradually in width and becomes a circle at about 200—300 periods which indicates a phase retardation of 90° . The phase difference caused by the amplifier itself can be neglected for these frequencies.

Insertion of the compensating circuit not only had as result that *the output amplitude was automatically constant up till a certain frequency*, but also that over the greatest part of the frequency range of constant amplitude, *the cathode ray oscillograph showed a straight line sloping under 45° , which proved that the phases were equal again.*

EXPLANATION OF THE FIGURES

- Fig. 1. Micro photo of a 0.005 mm wire. The wire is not yet stretched entirely. The distance between the two points is about 0.6 mm.
- Fig. 2. One of the hot wire holders in its position for the investigation of the boundary layer along the glass plate.
- Fig. 4. Reproduction of rectangular fluctuations by a 0.015 mm hot wire.
 - I. Without compensation,
 - II. With a correct compensation and greater amplification.
 - III. With "over compensation".

Mathematics. — Eine asymptotische Entwicklung für die grösste Nullstelle der Hermiteschen Polynome. Von F. ZERNIKE. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of May 30, 1931.)

1. Vor kurzem hat Herr S. C. VAN VEEN ¹⁾ eine neue Abschätzung für die grösste Nullstelle y_n der Hermiteschen Polynome $H_n(y)$ abgeleitet aus einer von ihm gefundenen asymptotischen Entwicklung für diese Funktionen. Sein Ergebnis ist

$$2n+2-6,1(n+1)^{1/3} < y_n^2 < 2n+2-2,3(n+1)^{1/3}.$$

Bei seiner Untersuchung besteht die Schwierigkeit darin, dass eine Entwicklung, die für $y = \sqrt{2n+2}$ bedeutungslos wird, bis nahe an diesen Wert benutzt werden muss. Selbstverständlich wird man bedeutend weiter kommen, wenn man zuerst eine Entwicklung für die Umgebung dieses Wertes aufstellt. Das führe ich in dieser Arbeit aus, teilweise nach dem Beispiel von WATSON ²⁾, vor allem aber von H. A. KRAMERS ³⁾, dessen Funktion ω ich, mit unwesentlichen Änderungen, übernommen habe. Weiter mache ich von der altbekannten Sturmschen Methode Gebrauch, die hier in einfachster Weise zum Ziele führt.

Es ist interessant, dass in einer soeben erschienenen Arbeit von LANGER ⁴⁾ in sehr allgemeinen analogen Fällen mittels derselben Sturmschen Methode sogar die Konvergenz der Entwicklung bewiesen wird. Der hier betrachtete Fall genügt aber nicht allen Bedingungen von LANGER, lässt wohl auch keine konvergente Potenzreihenentwicklung zu.

2. Das Hermitesche Polynom $H_n(y)$ genügt der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 H_n}{dy^2} - 2y \frac{dH_n}{dy} + 2n H_n = 0.$$

Für $z = H_n(y) e^{-1/2 y^2}$ folgt daraus

$$\frac{d^2 z}{dy^2} + (2n+1-y^2)z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

und es ist offenbar

$$z \rightarrow 0 \text{ für } y \rightarrow \infty \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

¹⁾ Proceedings Amsterdam, 34, S. 257 (1931).

²⁾ Theory of Bessel Functions, Cambridge 1922, S. 518.

³⁾ „Wellenmechanik und halbzahlige Quantisierung“ Z. f. Physik, 39, S. 828 (1926).

⁴⁾ Trans. Am. math. Soc. 33, S. 23 (1931).

Die Funktion z ist durch (1) und die Grenzbedingung (2) festgelegt bis auf eine, zunächst belanglose, multiplikative Konstante. Zur Untersuchung dieser Funktion in der Umgebung der kritischen Stelle $y = \sqrt{2n+1}$ führen wir als neue Variable ein

$$x = (2\sqrt{2n+1})^{1/3} (y - \sqrt{2n+1}); \quad (3)$$

wir erhalten dann

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - (x + \gamma x^2) z = 0 \quad (4)$$

wo

$$\gamma = 2^{-4/3} (2n+1)^{-2/3} \quad (5)$$

ist. Es liegt nahe, die Funktion z für grosses n zu vergleichen mit einer Funktion $\omega(x)$, für welche die Differentialgleichung und Grenzbedingung lauten

$$\omega'' - x\omega = 0 \quad (6)$$

$$\omega \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \infty \quad (7)$$

wozu noch willkürlich

$$\omega(0) = 1 \text{ sowie } z(0) = 1 \quad (8)$$

gesetzt sei. Bekanntlich kann die Lösung von (6) auf Zylinderfunktionen der Ordnung $\frac{1}{3}$ zurückgeführt werden. Insbesondere wird der Bedingung (7) genügt durch die Funktion K , welche auch bei vielen physikalischen Anwendungen auftritt, und man findet

$$\omega(x) = C_1 x^{1/3} K_{1/3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) \text{ für } x > 0 \quad (9)$$

und daraus die für alle x konvergente Potenzreihe

$$\omega(x) = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \quad (10)$$

deren Koeffizienten man einfacher durch Einsetzen in (6) berechnen kann, sobald man aus (9) den Wert von c_1 entnommen hat:

$$c_1 = \omega'(0) = -3^{1/3} \Gamma(\frac{2}{3}) / \Gamma(\frac{1}{3}) \quad (11)$$

Weiter folgt daraus für negatives Argument

$$\omega(-x) = C_2 x^{1/3} [J_{1/3}(\frac{2}{3} x^{3/2}) + J_{-1/3}(\frac{2}{3} x^{3/2})] \quad (12)$$

Die Ausdrücke (9) und (12) geben sehr leicht die Zahlenwerte für ω mittels der ausführlichen Tabellen von WATSON für die Zylinderfunktionen der Ordnung $\frac{1}{3}$. Die grösste Nullstelle von ω ist nach den Angaben von WATSON, l.c.:

$$\omega(a) = 0 \text{ für } a = -2,338107 \quad (13)$$

Für eine andere Methode, die Eigenschaften der ganzen Funktion ω zu studieren ohne Heranziehen der Theorie der Zylinderfunktionen, sehe man die oben zitierte Arbeit von KRAMERS.

3. Nach der Sturmschen Methode lässt sich nun leicht die gegenseitige Lage der Nullstellen von z und ω feststellen. Im folgenden wird für γ in (4) irgend ein fester positiver Wert angenommen, und dieser nur wenn nötig durch die Schreibweise $z(x, \gamma)$ oder $z(\gamma)$ besonders hervorgehoben. Die grösste Nullstelle von z liege bei $x = w(\gamma)$. Durch die Bedingung im Unendlichen ist eine Nullstelle bei positivem x ausgeschlossen, wie unmittelbar einzusehen ist.

Man hat nach (4) und (6)

$$\begin{aligned} z'' - xz &= \gamma x^2 z, \\ \omega'' - x\omega &= 0. \end{aligned}$$

Subtrahiert man diese Gleichungen nach Multiplikation resp. mit ω und z , und integriert, so findet man

$$\omega z' - z \omega' \Big|_b^c = \gamma \int_b^c x^2 z \omega dx.$$

Hier kann man, wie in allen folgenden Fällen, als obere Grenze ∞ nehmen, da die Funktionen ω und z dort exponentiell verschwinden, also

$$(z\omega' - \omega z')_b = \gamma \int_b^\infty x^2 z \omega dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Nimmt man $b = w$, so wird

$$\omega(w) z'(w) = -\gamma \int_w^\infty x^2 z \omega dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Nun ist wegen (8) $z > 0$ für $x > w$, daher auch $z'(w) > 0$, und (15) unerfüllbar für $w > a$, weil dann $\omega(w) > 0$ und auch der Integrand überall positiv wäre. Die grösste Nullstelle von z liegt also unterhalb der grössten Nullstelle von ω oder

$$w < a.$$

In genau derselben Weise findet man für zwei Werte γ_1 und $\gamma_2 > \gamma_1$, und die entsprechenden Funktionen $z(\gamma_1)$ und $z(\gamma_2)$ mit Nullstellen w_1 resp. w_2 .

$$z(w_2, \gamma_1) z'(w_2, \gamma_2) = -(\gamma_2 - \gamma_1) \int_{w_2}^\infty x^2 z(\gamma_1) z(\gamma_2) dx,$$

was in Widerspruch wäre mit der Annahme $w_2 > w_1$. Es ist daher $w_2 < w_1$ d.h. mit abnehmendem γ nimmt $w(\gamma)$ zu, bis zum Grenzwert $w(0) = a$.

Für die grösste Nullstelle y_n des Polynoms $H_n(y)$ bedeutet das, nach Transformation gemäss (3)

$$\sqrt{2n+1} + (2\sqrt{2n+1})^{-1/3} a_m < y_n < \sqrt{2n+1} + (2\sqrt{2n+1})^{-1/3} a \text{ für } n > m \quad (16)$$

wo man die untere Grenze einfach aus einem direkt berechneten Wert y_m findet aus

$$\sqrt{2m+1} + (2\sqrt{2n+1})^{-1/3} a_m = y_m$$

Beispielsweise ist $H_1(y) = 2y$, $y_1 = 0$, daraus $a_1 = -2^{1/3} 3^{2/3} = -2.620741$, weiter aus den unten in 6. angeführten Zahlenwerten $a_{73} = -2.347789$. Zum Vergleich mit Herrn VAN VEEN's Abschätzung sei aus (16) noch der asymptotische Wert für y_n^2 in derselben Näherung gegeben

$$y_n^2 \sim 2n+1 + 2^{2/3} (2n+1)^{1/3} a \sim 2n+2an^{1/3}$$

Die Zahl, welche Herr VAN VEEN zwischen 2.3 und 6.1 eingeschlossen gefunden hat, nähert sich für $n \rightarrow \infty$ also dem Wert $2a = 4.676214$.

4. Es liegt auf der Hand für die Lösung von

$$z'' - (x + \gamma x^2) z = 0$$

formal eine Potenzreihe nach γ anzusetzen:

$$z = \omega - \gamma \omega_1 + \gamma^2 \omega_2 - \dots \quad (17)$$

Einsetzen in die Differentialgleichung gibt für ω_n die nichthomogene Gleichung

$$\omega_n'' - x \omega_n = -x^2 \omega_{n-1} \quad n = 1, 2, 3, \dots, \omega_0 = \omega \quad (18)$$

mit den Bedingungen

$$\omega_n(0) = 0, \quad \omega_n(\infty) = 0 \quad (19)$$

Ich beweise nun vorerst, dass $\omega_n > 0$ für $x > 0$. Der Satz sei für ω_{n-1} bewiesen. Mit (6) kombiniert gibt (18) dann

$$(\omega \omega'_n - \omega_n \omega')_b = \int_b^\infty x^2 \omega_{n-1} \omega dx > 0 \quad (b \geq 0)$$

Setzt man hier für b eine Nullstelle von ω_n ein, so wird $\omega(b) \omega'_n(b) > 0$, daher

$$\omega'_n(b) > 0 \quad \text{für } b \geq 0 \quad (20)$$

Diese Ungleichung schliesst die Möglichkeit mehrerer nicht negativen Nullstellen von ω_n aus, da ω'_n für zwei nachfolgenden Nullstellen verschiedenes Vorzeichen haben muss. Es existiert also nur die eine nicht-negative Nullstelle $x = 0$ nach (19), und wegen $\omega'_n(0) > 0$ ist auch

$$\omega_n(x) > 0 \quad \text{für } x > 0 \quad (21)$$

Da (21) für die bekannte Funktion $\omega(x) = \omega_0(x)$ gilt, ist es dadurch für jedes n bewiesen.

Ich betrachte jetzt die Teilsumme z_n von (17)

$$z_n = \omega - \gamma \omega_1 + \dots + (-1)^n \gamma^n \omega_n$$

und setze diese in die Gleichung für z ein. Wegen (18) wird dann

$$z_n'' - (x + \gamma x^2) z_n = (-1)^{n+1} \gamma^{n+1} x^2 \omega_n$$

und diese Gleichung gibt mit (4) kombiniert

$$(z_n z' - z z_n')_b = (-1)^{n+1} \gamma^{n+1} \int_b^\infty x^2 z \omega_n dx \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Setzt man für b eine nichtnegative Nullstelle des Restes $R_n = z - z_n$ ein, so wird

$$(-1)^{n+1} z(b) R_n'(b) = \gamma^{n+1} \int_b^\infty x^2 z \omega_n dx > 0$$

und genau wie oben folgt daraus dass R_n' für alle Nullstellen dasselbe Vorzeichen hat, so dass nur die eine bei $x=0$ möglich ist, da nach Definition $z(0) = z_n(0) = 1$ ist und dass

$$(-1)^{n+1} R_n(x) > 0 \text{ für } x > 0.$$

Das bedeutet aber, dass $R_n = z - z_n$ und $R_{n+1} = z - z_{n+1}$ verschiedenes Vorzeichen haben, d.h. dass z zwischen z_n und z_{n+1} liegt. Damit ist nicht nur bewiesen, dass die Entwicklung (17) für positives x asymptotisch im Sinne POINCARÉ's ist, sondern auch, dass der Fehler absolut kleiner als das erste vernachlässigte Glied ist.

5. Für negative Werte von x , welche man für die Untersuchung der Nullstellen gerade braucht, gelingt ein ähnlich einfaches Einschliessen zwischen Grenzen nicht. Ich beschränke mich deshalb darauf, die asymptotische Entwicklung für $w(\gamma)$ anzugeben, um so mehr als offensichtlich eine Fehlerabschätzung im Anschluss an die folgenden Rechnungen keine prinzipiellen Schwierigkeiten bietet, sondern nur langwierige Rechnungen erfordert.

Es sei w_n die grösste Nullstelle von z_n . Nimmt man in (22) $b = w_n$, so bekommt man

$$z(w_n) z_n'(w_n) = (-1)^n \gamma^{n+1} \int_{w_n}^\infty x^2 z \omega_n dx \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Daraus folgt dass asymptotisch, für $\gamma \rightarrow 0$

$$z(w_n) = O(\gamma^{n+1}) \text{ und } w - w_n = O(\gamma^{n+1})$$

d.h. die Folge

$$w_0 = \alpha, w_1, w_2, \dots$$

gibt die gesuchte asymptotische Entwicklung für w , oder anders ausgedrückt: entwickelt man w_n nach steigenden Potenzen von γ , so stimmen die ersten $n+1$ Glieder mit der asymptotischen Entwicklung von w

$$w = \alpha + \alpha_1 \gamma + \alpha_2 \gamma^2 + \dots \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

überein. So findet man aus $z_1(w_1) = \omega(w_1) - \gamma\omega_1(w_1) = 0$ einfach $\omega(a + \gamma a_1) \sim \gamma\omega_1(a)$ und

$$a_1 = \omega_1(a)/\omega'(a)$$

Um nun die Funktionen ω_1, ω_2 , u.s.w. zu berechnen, bemerken wir dass sie in der Form

$$\omega_n = p_n(x) \omega(x) + q_n(x) \omega'(x) \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

dargestellt werden können, wo p_n und q_n Polynome in x sind. In der Tat genügt (25) der Bedingung (19) im Unendlichen. Einsetzen in (18) gibt für die Polynome die Beziehungen

$$p_n'' + 2xq_n' + q_n = -x^2 p_{n-1}, \quad 2p_n' + q_n'' = -x^2 q_{n-1} \quad . \quad (26)$$

wie man leicht nachrechnet, unter wiederholter Benutzung der Differentialgleichung (6) für ω . Eliminieren von p_n gibt

$$q_n''' - 4xq_n' - 2q_n = 2x^2 p_{n-1} - \frac{d}{dx}(x^2 q_{n-1}) \quad . \quad . \quad (27)$$

und daraus lässt sich das Polynom q_n unzweideutig berechnen, anfangend mit dem Glied höchsten Grades, aus den beiden vorangehenden Polynomen p_{n-1} und q_{n-1} . Man bestimme weiter p_n' aus der zweiten Gleichung (26) und schliesslich die Integrationskonstante für p_n aus der Bedingung $\omega_n(0) = 0$.

Anfangend mit $p_0 = 1, q_0 = 0$ finde ich

$$p_1 = \frac{1}{5}x; \quad p_2 = \frac{1}{50}x^5 - \frac{7}{90}x^2 - \frac{9}{35}c_1; \quad p_3 = \frac{124}{\dots}x^6 + \frac{2957}{\dots}x^3 - \frac{9}{175}c_1x.$$

$$q_1 = -\frac{1}{5}x^2; \quad q_2 = -\frac{3}{35}x^3 - \frac{9}{35}; \quad q_3 = -\frac{1}{750}x^7 - \frac{871}{\dots}x^4 + \frac{9}{175}c_1x^2 - \frac{2957}{\dots}x.$$

Es sei die weitere Rechnung für a_1 und a_2 in (24) noch etwas näher angeführt. Man hat nach dem früheren dazu die Nullstelle w_2 von $z_2 = \omega - \gamma\omega_1 + \gamma^2\omega_2$ bis zur Ordnung γ^2 zu berechnen. Dazu braucht man folgende Näherungen

$$z_2(a) = 0 + \frac{1}{5}a^2\omega'\gamma - \left(\frac{3}{35}a^3 + \frac{9}{35}\right)\omega'\gamma^2$$

$$z_2'(a) = \omega' + \frac{1}{5}a\omega'\gamma$$

$$z_2''(a) = 0,$$

wo mit ω' der Wert $\omega'(a)$ gemeint ist, der schliesslich wieder herausfällt. Aus diesen Daten folgt, wieder bis auf höhere Glieder als γ^2 genau

$$w_2 = a - \frac{z_2(a)}{z_2'(a)} = a - \frac{1}{5}a^2\gamma + \left(\frac{22}{175}a^3 + \frac{9}{35}\right)\gamma^2 \quad . \quad . \quad (28)$$

Nach etwas längerer Rechnung finde ich noch für das nächste Glied

$$a_3 = \dots \dots \dots (29)$$

Die Koeffizienten der Entwicklung (24) werden in dieser Weise als Polynome in α bestimmt. Man kann offenbar in diese für α nicht nur die grösste Nullstelle von ω , sondern ebensogut die zweitgrösste, drittgrösste, u.s.w. einsetzen, und findet dann die asymptotische Entwicklung für die entsprechenden Nullstellen von $z(\gamma)$ und von $H_n(\gamma)$.

6. Für die grösste Nullstelle y_n von $H_n(\gamma)$ gilt nach (3)

$$y_n = \sqrt{2n+1} + 2^{-1/6} (2n+1)^{-1/6} w(\gamma).$$

Mit γ nach (5), α nach (13) und $w(\gamma)$ nach (24), (28) und (29) finde ich daraus

$$y_n \sim \sqrt{2n+1} - 1,8557571 (2n+1)^{-1/6} - 0,3443834 (2n+1)^{-5/6} \\ - 0,168715 (2n+1)^{-9/6} - 0,151965 (2n+1)^{-13/6}.$$

In Ermangelung einer Fehlerabschätzung für diese Entwicklung schien es mir interessant für einzelne kleine und grössere n den direkt berechneten Wert von y_n mit dem Ergebnis der Entwicklung zu vergleichen. Untenstehende Tabelle enthält die Resultate für $n=1, 4, 12, 32$ und 73 . Die 4. bis 7. Spalten geben die Reste, wenn man von y_n die Summe der ersten zwei bis fünf Glieder der Entwicklung abzieht, mit umgekehrtem Vorzeichen.

n	y_n	$\sqrt{2n+1} - y_n$	2 Gl. $- y_n$	3 Gl. $- y_n$	4 Gl. $- y_n$	5 Gl. $- y_n$
1	0	1.732051	0.186693	0.048832	0.016363	+ 0.002303
4	1.650680	1.349320	0.062609	0.007421	0.001172	- 0.000129
12	3.889725	1.110275	0.025021	0.001465	0.000115	- 0.000027
32	7.125815	0.936443	0.010959	0.000335	0.000013	- 0.000001
73	11.3110809	0.8132748	0.0054790	0.0000977	0.0000031	- 0.0000000

Die Berechnung von y_{12} , y_{32} und y_{73} liess sich leicht mittels der rekurrenten Beziehung

$$H_{n+1}(y) = 2y H_n(y) - 2n H_{n-1}(y)$$

ausführen. Ich benutzte die noch etwas einfachere Form

$$h_{n+1}(y) = y h_n(y) - n h_{n-1}(y) \dots \dots \dots (30)$$

welche man erhält für die Polynome

$$h_n(y) = 2^{-n/2} H_n(y/\sqrt{2})$$

Für ganzzahliges y lassen die h_n sich sehr leicht nach einander berechnen, ausgehend von $h_0 = 1$, $h_1 = y$. Man erhält zuerst eine schnell ansteigende Zahlenreihe, bald kürzt man die Zahlen auf die ersten 6 bis 9 Stellen, bis auf einmal die Reihe steil abfällt und nach einigen Gliedern durch Null geht. Für dasjenige n , das dem kleinsten absoluten Wert von h_n entspricht, berechnet man y_n in einfachster Weise, da die Ableitungen von h_n wegen

$$h'_n(y) = n h_{n-1}(y)$$

direkt aus den vorangehenden Zahlen der Reihe gefunden werden. Ich nahm $y = 10$ zur weiteren Vereinfachung der Rechnungen und fand so y_{32} , und $y = 16$, weil die asymptotische Entwicklung für $n = 73$ einen Wert sehr nahe an 16 voraussagen liess. Die Berechnung braucht man übrigens nicht mit $n = 0$ anzufangen, da es erstens nur auf die Verhältnisse der Zahlen ankommt, zweitens ein Fehler im Verhältnis h_{m+1}/h_m durch die weitere Rechnung schnell abnimmt, solange m nicht zu gross ist. Ich nahm daher ziemlich willkürlich $h_{45} = 1$, $h_{46} = 12$, und rechnete auf eine neunstellige Maschine bis $h_{73}(16)$. Ebenso wurde $h_{12}(5,5)$ gefunden und die Nullstelle von h_{12} die um weniger als 0.001 grösser ist.

Mathematics. — Die Nullstellen gewisser durch Rekursionsformeln definierten Polynome. Von O. BOTTEMA. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of May 30, 1931.)

§ 1. Wir definieren die Polynome $Q_n(x)$ durch die folgenden Rekursionsformeln:

$$\left. \begin{aligned} Q_0(x) &= 1 \\ Q_1(x) - (x + b_1) Q_0(x) &= 0 \\ Q_n(x) - (x + b_n) Q_{n-1}(x) + c_{n-1}^2 Q_{n-2}(x) &= 0 \quad (n = 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

wo b_n und c_n reelle Zahlen sind und $c_n \neq 0$ ist.

Zu den auf diese Weise definierbaren Polynomfolgen gehören u. a. diejenigen der *Legendreschen*, der *Tchebycheffschen*, der *Laguerreschen* und der *Hermiteschen* Polynome.

Die Polynome, welche den anscheinend etwas allgemeineren Rekursionsformeln

$$\left. \begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) - (A_1 x + B_1) P_0(x) &= 0 \\ P_n(x) - (A_n x + B_n) P_{n-1}(x) + C_{n-1} P_{n-2}(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

mit $A_n \neq 0$ und $\frac{c_n}{A_n A_{n+1}} > 0$, genügen, können durch Multiplikation mit einer Konstanten auf den Fall (1) zurückgeführt werden. Man wähle dazu:

$$Q_n(x) = \frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} P_n(x) \quad (n \geq 1); \quad (3)$$

man findet dann

$$b_n = \frac{B_n}{A_n}, \quad c_n = \sqrt{\frac{C_n}{A_n A_{n+1}}} \quad (n \geq 1).$$

§ 2. Das Polynom $Q_n(x)$ lässt sich in der Form einer *symmetrischen* Determinante schreiben, wobei nur die Elemente der Hauptdiagonale und die benachbarten von Null verschieden sind. Man hat nämlich:

$$Q_n(x) = \begin{vmatrix} x + b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & x + b_2 & c_2 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & x + b_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x + b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-1} & x + b_n \end{vmatrix} \quad (4)$$

Entwickelt man die Determinante nach den Elementen der letzten Zeile (oder Kolonne), dann findet man, dass sie der Gleichung (1) genügt.

Die Variable x kommt in den Gliedern der Determinante nur *linear* vor; man kann diese also auffassen als die *Diskriminante eines Büschels quadratischer Formen*. Die Gleichung $Q_n(x) = 0$ hat den Charakter einer s.g. λ -, oder *säkularen Gleichung*. Stellen wir die Variablen der quadratischen Formen durch X_ν vor ($\nu = 1, 2, \dots, n$), dann ist $Q_n(x)$ die Diskriminante von

$$F_1 + x F_2,$$

wo

$$F_1 \equiv \sum_1^n b_\nu X_\nu^2 + 2 \sum_1^{n-1} c_\nu X_\nu X_{\nu+1} \dots \dots \dots (5)$$

und

$$F_2 \equiv \sum_1^n X_\nu^2 \dots \dots \dots (6)$$

ist.

Einem bekannten Satze zufolge hat die Gleichung

$$|F_1 + x F_2| = 0$$

in dem Fall, dass eine der beiden quadratischen Formen *definit* ist, immer nur reelle und sämtlich verschiedene Wurzeln.

Wir haben also den folgenden

Satz I. *Die Nullstellen von $Q_n(x)$ sind reell und verschieden.*

Ein in der Schwingungstheorie sehr bekannter Satz sagt aus, dass die Nullstellen einer säkularen Determinante (eines Büschels quadratischer Formen, wovon wenigstens eine definit ist), getrennt werden durch diejenigen der Unterdeterminante des Elementes der letzten Zeile und der letzten Kolonne. Wendet man diesen Satz auf unsren Fall an, so finden wir den

Satz II. *Die Nullstellen von $Q_n(x)$ werden getrennt durch diejenigen von $Q_{n-1}(x)$.*

§ 3. Um eine obere Grenze für die Nullstellen von $Q_n(x)$ ableiten zu können, betrachten wir das Polynom

$$Q_n(x+p),$$

wo p eine konstante Zahl ist. Es ist identisch mit der Diskriminante

$$|F_1 + (x+p) F_2|.$$

Die Nullstellen von $Q_n(x+p)$ sind also die Wurzeln der säkularen Gleichung der zwei quadratischen Formen

$$F_1 + p F_2 \quad \text{und} \quad F_2.$$

Die zweite dieser Formen ist positiv definit; ist auch die erste Form positiv definit, so sind, einem bekannten Satze zufolge, die Wurzeln der

säkularen Gleichung sämtlich negativ; ist sie negativ definit so sind sie sämtlich positiv. Wir haben also Folgendes:

Wenn man die Zahl p so wählt, dass die quadratische Form

$$F_1 + p F_2 \equiv \sum_{\nu=1}^n (p + b_{\nu}) X_{\nu}^2 + 2 \sum_{\nu=1}^{n-1} c_{\nu} X_{\nu} X_{\nu+1} \dots \dots \dots (7)$$

positiv definit ist, dann sind alle Nullstellen von $Q_n(x)$ kleiner als p ; wird aber p so gewählt, dass die Form negativ definit ist, so sind die Nullstellen sämtlich grösser als p . Um also Abschätzungen für die grösste bzw. kleinste Nullstelle zu finden, genügt es hinreichende Bedingungen für p abzuleiten damit die quadratische Form (7) positiv bzw. negativ definit sei.

§ 4. Die quadratische Form (7) enthält, neben den rein quadratischen Gliedern, nur solche gemischten Glieder, deren Variablen auf einander folgende Indizes haben. Durch diesen Umstand ist es möglich, die Bedingung damit sie definit sei, durch ein System einfacher Bedingungen zu ersetzen, die denjenigen, welche bei binären Formen auftreten, entsprechen.

Wir verfahren nun folgenderweise. Die Koeffizienten der quadratischen Glieder werden jeder als die Summe von zwei Zahlen geschrieben, indem wir setzen:

$$X_{\nu}^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{k_{\nu}}{2} \right) X_{\nu}^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{k_{\nu}}{2} \right) X_{\nu}^2, \dots \dots \dots (8)$$

wo $k_{\nu} (\nu = 1, 2, \dots, n)$ zunächst unbestimmt gelassene Zahlen sind mit der Bedingung $|k_{\nu}| < 1$.

Die quadratische Form (7) wird dann also

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \left[(p + b_{\nu}) \left(\frac{1}{2} - \frac{k_{\nu}}{2} \right) X_{\nu}^2 + 2c_{\nu} X_{\nu} X_{\nu+1} + (p + b_{\nu+1}) \left(\frac{1}{2} + \frac{k_{\nu+1}}{2} \right) X_{\nu+1}^2 \right] \quad (9)$$

Eine hinreichende Bedingung damit diese Form definit sei, ist

$$(1 - k_{\nu})(1 + k_{\nu+1})(p + b_{\nu})(p + b_{\nu+1}) \geq 4c_{\nu}^2 \quad (\nu = 1, 2, \dots, n-1). \quad (10)$$

Damit haben wir das Resultat erreicht, das als Hauptergebnis dieser Arbeit betrachtet werden kann, nämlich den

Satz III. Sind k_{ν} beliebige Zahlen mit $|k_{\nu}| < 1$, ($\nu = 1, 2, \dots, n-1$), und setzt man

$$\left. \begin{aligned} p_{\nu} &= -\frac{1}{2}(b_{\nu} + b_{\nu+1}) + \sqrt{\frac{1}{4}(b_{\nu} - b_{\nu+1})^2 + \frac{4c_{\nu}^2}{(1 - k_{\nu})(1 + k_{\nu+1})}} \\ p'_{\nu} &= -\frac{1}{2}(b_{\nu} + b_{\nu+1}) - \sqrt{\frac{1}{4}(b_{\nu} - b_{\nu+1})^2 + \frac{4c_{\nu}^2}{(1 - k_{\nu})(1 + k_{\nu+1})}} \end{aligned} \right\} \dots \dots (11)$$

($\nu = 1, 2, \dots, n-1$),

so liegen sämtliche Nullstellen der durch die Rekursionsformeln (1) definierten Polynome $Q_n(x)$ im Intervall:

$$\min_{1 \leq \nu \leq n-1} p'_\nu < x < \max_{1 \leq \nu \leq n-1} p_\nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Wählt man $k_\nu = 0$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$), so findet man für die Nullstellen eine obere und eine untere Grenze, welche nur von den Koeffizienten der Rekursionsformeln abhängig sind. Man leitet dann unmittelbar folgenden Satz ab:

Satz IV. Sind die Zahlenreihen b_ν und c_ν^2 beschränkt, dann liegen die Nullstellen sämtlicher Polynome $Q_n(x)$ in einem endlichen Intervall.

§ 5. Man kann auch leicht eine Bedingung für p angeben, so dass die quadratische Form (7) gewiss nicht definit ist. Hinreichend ist dafür offenbar, dass für irgendeinen Wert ν die Ungleichung

$$(p + b_\nu)(p + b_{\nu+1}) < c_\nu^2$$

besteht. Bezeichnet man also die Ausdrücke

$$-\frac{1}{2}(b_\nu + b_{\nu+1}) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(b_\nu - b_{\nu+1})^2 + c_\nu^2} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n), \quad (13)$$

mit q_ν , bzw. q'_ν , dann hat man: es gibt eine Nullstelle von $Q_n(x)$, welche grösser als $\max q_\nu$ ist; es gibt eine Nullstelle, welche kleiner als $\min q'_\nu$ ist. Daraus folgert man unmittelbar den

Satz V. Sind die Zahlen b_ν beschränkt, die Zahlen c_ν^2 dagegen unbeschränkt, so ist die Menge der Nullstellen der Polynome $Q_n(x)$ unbeschränkt, sowohl nach oben wie auch nach unten.

§ 6. Die allgemeinen Resultate der vorhergehenden Paragraphen wenden wir jetzt auf Spezialfälle an. Wir betrachten zunächst den Fall, dass die Koeffizienten b_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$) sämtlich null sind. Aus den Formeln (1) geht dann hervor, dass die Polynome $Q_n(x)$ gerade, bzw. ungerade sind, je nachdem n eine gerade, oder eine ungerade Zahl ist. Die Nullstellen von $Q_n(x)$ liegen paarweise symmetrisch in Bezug auf Null. Aus (11) folgt dann auch $p_\nu = -p'_\nu$, und Satz III lautet jetzt:

Satz III*. Sind die Koeffizienten b_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$) sämtlich Null, so liegen die Nullstellen von $Q_n(x)$ im Intervall

$$-\max_{1 \leq \nu \leq n-1} \frac{2c_\nu}{\sqrt{(1-k_\nu)(1+k_{\nu+1})}} < x < \max_{1 \leq \nu \leq n-1} \frac{2c_\nu}{\sqrt{(1-k_\nu)(1+k_{\nu+1})}}, \quad (14)$$

wo k_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$) beliebige Zahlen sind mit der Bedingung $|k_\nu| < 1$.

Ich werde die grösste Nullstelle von $Q_n(x)$ mit x_n bezeichnen. Wählt man $k_\nu = 0$, so findet man

$$x_n < 2 \max_{1 \leq \nu \leq n-1} c_\nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Durch geeignete Wahl der Zahlen k_v kann man diese Abschätzung verschärfen.

Wir setzen dabei vorerst den Fall voraus, dass die Zahlen c_v^2 eine unbeschränkte Folge bilden. Nach Satz IV sind dann auch die Nullstellen von $Q_n(x)$ unbeschränkt. Wir nehmen an, dass die Zahlen c_v^2 höchstens der Grössenordnung v^d sind, d.h. wir setzen

$$c_v^2 \leq C v^d \quad (d > 0), \dots \dots \dots (16)$$

wo C eine geeignet gewählte konstante Zahl ist. Die Abschätzung (15) gibt dann

$$x_n^2 < 4 C n^d \dots \dots \dots (17)$$

Wir gelangen aber zu einem besseren Resultat, wenn wir für k_v folgende Wahl treffen:

$$k_v = \frac{1}{2(n-v) + 1} \quad (v = 1, 2, \dots, n) \dots \dots \dots (18)$$

Man hat dann:

$$\frac{4}{(1-k_v)(1+k_{v+1})} = 4 - \frac{1}{(n-v)^2} \quad (v = 1, 2, \dots, n-1)$$

Aus dem Satz III* geht dann hervor:

$$x_n^2 < \text{Max}_{1 \leq v \leq n-1} C \left(4 - \frac{1}{(n-v)^2} \right) v^d \dots \dots \dots (19)$$

Betrachten wir die Funktion

$$\varphi(y) = \left(4 - \frac{1}{y^2} \right) (n-y)^d, \quad \text{wo } 1 \leq y \leq n-1.$$

Man hat

$$\varphi'(y) = \frac{(n-y)^{d-1}}{y^3} [-4 dy^3 + (d-2)y + 2n]$$

Der letzte Faktor ist immer positiv für

$$y = \left(\frac{n}{2d+3} \right)^{1/3},$$

wie aus Substitution hervorgeht. Für diesen Wert von y ist die Funktion $\varphi(y)$ also wachsend; das Maximum von $\varphi(y)$ liegt also bei einem Wert y , der grösser ist als $\left(\frac{n}{2d+3} \right)^{1/3}$. Das Maximum ist also kleiner als

$$4 \left[n - \left(\frac{n}{2d+3} \right)^{1/3} \right]^d.$$

Wir haben also folgenden

Satz VI. Wenn die Koeffizienten der Rekursionsformeln (1) folgenden Bedingungen genügen:

$$b_\nu = 0 \text{ und } c_\nu^2 \leq C\nu^d \quad (\nu = 1, 2, \dots, n),$$

wo $d > 0$ und C eine geeignet gewählte konstante Zahl ist, so gilt für die grösste Nullstelle x_n von $Q_n(x)$ die Ungleichung

$$x_n^2 < 4C(n - C_1 n^{1/3})^d, \quad \dots \quad (20)$$

wo die Zahl C_1 nur von d abhängt.

§ 7. Die obige Methode zur Bestimmung einer oberen Grenze für x_n haben wir schon früher angewandt für den Spezialfall der *Hermiteischen Polynome*. Die Polynome $H_n(x) = (-\frac{1}{2})^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$ genügen den Rekursionsformeln:

$$\left. \begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) - xH_0(x) &= 0 \\ H_\nu(x) - xH_{\nu-1}(x) + \frac{\nu-1}{2}H_{\nu-2}(x) &= 0, \end{aligned} \right\} \dots \quad (21)$$

sodass

$$b_\nu = 0, \quad c_\nu^2 = \frac{\nu}{2}.$$

d.h. $C = \frac{1}{2}$, $d = 1$ ist.

Für die grösste Nullstelle x_n des *Hermiteischen Polynoms* $H_n(x)$ finden wir also die Ungleichung¹⁾

$$x_n^2 < 2(n - C_1 n^{1/3}) \quad \dots \quad (22)$$

Wir bemerken noch, dass inzwischen durch VAN VEEN²⁾ eine untere Grenze für x_n abgeleitet worden ist, nämlich

$$x_n^2 > 2(n - C_2 n^{1/3}), \quad \dots \quad (23)$$

sodass wenigstens für die Nullstellen der *Hermiteischen Polynome* eine sehr scharfe Abschätzung vorliegt.

§ 8. Indem wir uns noch immer auf den Fall $b_\nu = 0$ beschränken, setzen wir jetzt voraus, dass die Zahlenfolge c_ν^2 beschränkt ist. Unsrem Satz IV zufolge gehören die Nullstellen x_n einem endlichen Intervall an.

¹⁾ O. BOTTEMA, Die Nullstellen der *Hermiteischen Polynome*. Proc. Amsterdam. Vol. XXXIII (1930), p. 495-503.

²⁾ S. C. VAN VEEN, Asymptotische Entwicklung und Nullstellenabschätzung der *Hermiteischen Funktionen*. Proc. Amsterdam. Vol. XXXIV (1931) p. 257.

Die Abschätzung (15) kann man jetzt verbessern, indem man für die Zahlen k_ν z.B. folgende Wahl trifft:

$$k_\nu = \frac{\nu - n}{(2\nu - 1)n} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n) \quad (24)$$

Man findet dann

$$\frac{4}{(1 - k_\nu)(1 + k_{\nu+1})} \left(4 - \frac{1}{\nu^2} \right) \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2n} \right) \left(1 + \frac{\nu+1}{\nu} \cdot \frac{1}{2n} \right)}$$

Der Ausdruck $\left(1 - \frac{1}{2n} \right) \left(1 + \frac{\nu+1}{\nu} \cdot \frac{1}{2n} \right)$ hat seinen kleinsten Wert für $\nu = n-1$, sodass man hat

$$\frac{4}{(1 - k_\nu)(1 + k_{\nu+1})} \leq \left(4 - \frac{1}{\nu^2} \right) \left(1 - \frac{1}{(2n-1)^2} \right)$$

Hieraus geht hervor die Abschätzung:

$$x_n^2 < \text{Max}_{1 \leq \nu \leq n-1} c_\nu^2 \left(4 - \frac{1}{\nu^2} \right) \left(1 - \frac{1}{(2n-1)^2} \right) \quad (25)$$

§ 9. Wir wenden dieses Resultat auf die *Legendreschen Polynome* $P_n(x)$ an. Setzt man $Q_n(x) = \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} P_n(x)$, so haben die Rekursionsformeln folgende Form:

$$\left. \begin{aligned} Q_0(x) &= 1, \quad Q_1(x) - x Q_0(x) = 0, \\ Q_\nu(x) - x Q_{\nu-1}(x) + \frac{(\nu-1)^2}{(2\nu-3)(2\nu-1)} Q_{\nu-2}(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

so dass

$$b_\nu = 0, \quad c_\nu^2 = \frac{\nu^2}{(2\nu-1)(2\nu+1)}$$

ist. Die Abschätzung (25) gibt somit das Resultat: für die grösste Nullstelle x_n des *Legendreschen Polynoms* $P_n(x)$ gilt:

$$x_n^2 < 1 - \frac{1}{(2n-1)^2} \quad (27)$$

Die Genauigkeit dieser Ungleichung ist ungefähr dieselbe wie in der von BRUNS ¹⁾ herrührenden, übrigens etwas besseren Abschätzung.

$$x_n^2 < \cos^2 \frac{\pi}{2n+1} \quad (28)$$

¹⁾ BRUNS, Zur Theorie der Kugelfunktionen. Journ. f. d. reine und angewandte Mathem. 90, (1881) p. 322.

Die *Tschebycheffschen* Polynome

$$T_0(x) = 1, \quad T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x)$$

genügen den Formeln

$$\left. \begin{aligned} T_1(x) - x T_0(x) &= 0 \\ T_2(x) - x T_1(x) + \frac{1}{2} T_0(x) &= 0 \\ T_\nu(x) - x T_{\nu-1}(x) + \frac{1}{4} T_{\nu-2}(x) &= 0. \quad (\nu = 3, 4, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Man hat dann

$$b_\nu = 0, \quad c_1^2 = \frac{1}{2}, \quad c_\nu^2 = \frac{1}{4} \quad (\nu \geq 2)$$

Für die grösste Nullstelle x_n Polynoms $T_n(x)$ gibt unsere Methode also das Resultat

$$x_n^2 < \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) \left(1 - \frac{1}{(2n-1)^2}\right) \cdot \dots \quad (30)$$

§ 10. Im Folgenden lassen wir die Bedingung $b_\nu = 0$ fort, fassen aber eine ganz bestimmte Polynomfolge ins Auge, diejenige nämlich der *Laguerreschen Polynome*.

Setzt man

$$L_n(x) = (-1)^n e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}),$$

so sind die Rekursionsformeln die folgenden:

$$\left. \begin{aligned} L_0(x) &= 1 \\ L_1(x) - (x-1)L_0(x) &= 0 \\ L_n(x) - (x-2n+1)L_{n-1}(x) + (n-1)^2 L_{n-2}(x) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Man hat also

$$b_\nu = -(2\nu-1), \quad c_\nu^2 = \nu^2.$$

Die Zahlen p_ν und p'_ν (11) unsres Hauptsatzes III werden also

$$p_\nu = 2\nu + \sqrt{1 + \frac{4\nu^2}{(1-k_\nu)(1+k_{\nu+1})}}; \quad p'_\nu = 2\nu - \sqrt{1 + \frac{4\nu^2}{(1-k_\nu)(1+k_{\nu+1})}}. \quad (32)$$

Wählt man

$$k_\nu = \frac{-1}{2\nu-1},$$

so wird

$$(1-k_\nu)(1+k_{\nu+1}) = \frac{4\nu^2}{4\nu^2-1}$$

sodass

$$p'_\nu = 0,$$

§ 11. Zum Schluss leiten wir für die grösste Nullstelle von $L_n(x)$ noch eine untere Grenze ab; wir folgen dabei einer Methode, welche auch allgemein auf durch Rekursionsformeln (1) definierte Polynome anwendbar ist¹⁾.

In § 4 war von der quadratischen Form

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \left[(p+b_\nu) \left(\frac{1}{2} - \frac{k_\nu}{2} \right) X_\nu^2 + 2c_\nu X_\nu X_{\nu+1} + (p+b_{\nu+1}) \left(\frac{1}{2} + \frac{k_{\nu+1}}{2} \right) X_{\nu+1}^2 \right] \quad (35)$$

die Rede; k_ν ($\nu=1, 2, \dots, n$) sind dabei beliebige Zahlen mit der Bedingung $|k_\nu| < 1$. Die Form ist gewiss definit wenn

$$(1-k_\nu)(1+k_{\nu+1})(p+b_\nu)(p+b_{\nu+1}) \geq 4c_\nu^2$$

ist. Wir wählen jetzt für p eine feste von n abhängige Zahl und bestimmen die Zahlen k_ν mittels der Gleichungen:

$$k_1 = -1, \quad (1-k_\nu)(1+k_{\nu+1}) = \frac{4c_\nu^2}{(p+b_\nu)(p+b_{\nu+1})} \quad (36)$$

Wenn nun der Fall eintritt, dass in der auf diese Weise definierten Zahlenfolge k_ν eine Zahl k_μ vorkommt mit der Eigenschaft

$$|k_\mu| > 1, \quad \mu \leq n,$$

so ist die quadratische Form nicht definit und es gibt also einen Nullpunkt von $Q_n(x)$, welcher grösser als p ist.

Die Gleichungen (36) werden im Falle der *Laguerreschen Polynome*:

$$k_1 = -1, \quad (1-k_\nu)(1+k_{\nu+1}) = \frac{4\nu^2}{p^2 - 4\nu p + 4\nu^2 - 1} \quad (37)$$

Hieraus geht hervor

$$k_{\nu+1} - k_\nu = \frac{k_\nu^2 + l_\nu}{1 - k_\nu} \quad (38)$$

wo

$$l_\nu = \frac{4\nu p - p^2 + 1}{4\nu^2 - 4\nu p + p^2 - 1}$$

Wir nehmen jetzt $p = 4n - 16\sqrt{2} \cdot n^{1/2}$ und legen die ganze Zahl ν_1 fest durch

$$\nu_1 - 1 \leq n - 2\sqrt{2} \cdot n^{1/2} < \nu_1 \quad (39)$$

¹⁾ In der S. 686 zitierten Arbeit wandten wir die Methode an auf die Hermiteschen Polynome. Das Resultat wurde aber durch VAN VEEN erheblich verschärft. Vgl. (23).

Für jedes $n \geq 8$ ist also $v \geq 1$. Man hat nun für jedes $v \geq v_1$

$$4v - p \geq 4v_1 - p > 4(n - 2\sqrt{2} \cdot n^{1/2}) - (4n - 16\sqrt{2} \cdot n^{1/2}) = 8\sqrt{2} \cdot n^{1/2},$$

also

$$l_v = \frac{4vp - p^2 + 1}{4v^2 - 4vp + p^2 - 1} > \frac{p(4v - p)}{(p - 2v)^2} > \frac{4v - p}{p} > \frac{8\sqrt{2} \cdot n^{1/2}}{4n} = 2\sqrt{2} \cdot n^{-1/2}. \quad (40)$$

Aus (38) geht hervor

$$k_{v+1} - k_v = \frac{k_v^2 + l_v}{1 - k_v} > \frac{1}{2} l_v,$$

also für jedes $v \geq v_1$

$$k_{v+1} - k_v > \sqrt{2} \cdot n^{-1/2}$$

Man findet dann:

$$\begin{aligned} k_n &= \sum_{v=v_1}^{n-1} (k_{v+1} - k_v) + k_{v_1} > \sqrt{2} \cdot n^{-1/2} (n - v_1) - 1 > \\ &> \sqrt{2} \cdot n^{-1/2} (2\sqrt{2} \cdot n^{1/2} - 1) - 1 > 4 - \sqrt{2} \cdot n^{-1/2} - 1 > 1. \end{aligned}$$

Die grösste Nullstelle von $L_n(x)$ übertrifft also jedenfalls für $n \geq 8$ den Wert $4n - 16\sqrt{2} \cdot n^{1/2}$. Da übrigens diese Ungleichung auch für $n < 8$ gilt, haben wir zusammenfassend den folgenden

Satz VII. Ist x_n die grösste Nullstelle des Laguerreschen Polynoms $L_n(x)$, so hat man die Ungleichungen

$$4n - C_1 n^{1/2} < x_n < 4n - C_2 n^{1/2},$$

wo C_1 und C_2 geeignet gewählte konstante Zahlen sind.

Zum Vergleich folgen hier die von NEUMANN¹⁾ abgeleiteten Ungleichungen:

$$3n - 4 < x_n < 4n + 2.$$

¹⁾ NEUMANN, l. c. p. 23.

Mathematics. — *A solution of the equation of the vibrating string.*
By W. A. VERSLUYS. (Communicated by Prof. R. WEITZENBÖCK).

(Communicated at the meeting of May 30, 1931.)

§ 1. In this communication will be given a solution of the equation of the vibrating string of length l , with second member

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f(x, t), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

the boundary conditions being, as usual, $y = \dot{y} = 0$ for $t = 0$ and $0 \leq x \leq l$ and $y = 0$ for $x = 0$ and $x = l$ and any value of t . First will be treated the simple cases, that the second member $f(x, t)$ reduces to $f(x)$ or $f(t)$; an extension of the method, giving the solution in these cases, will give the solution in the general case.

In the first place will be treated the case, that the second member is a function of x only, then the equation is

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

A particular solution of (2) will be $y = F_1(x) = - \int dx \int f(x) dx$, where the constants of integration are so chosen that $F_1(0)$ and $F_1(l)$ are zero. The particular solution, so determined, $y = F_1(x)$, satisfies the equation (2), the boundary condition for the ends: $y = 0$ for $x = 0$ and for $x = l$, t arbitrary, and the condition $\dot{y} = 0$ for $t = 0$. We get the solution of (2), satisfying all the boundary conditions, by adding the solution of the equation

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$y = -\frac{1}{2} \{F_2(x+t) + F_2(x-t)\}$, where $F_2(x)$ is a periodic function of x with period $2l$, having the points $y = 0$, $x = 0$ and $y = 0$, $x = l$ for centres and where $F_2(x) \equiv F_1(x)$ for $0 \leq x \leq l$.

The function $y = -\frac{1}{2} F_2(x+t)$ is a solution of equation (3), as $F_2(x+t)$ is a solution and this is the case because

$$\frac{\partial^2 F_2(x+t)}{\partial t^2} = \frac{d^2 F_2(x+t)}{d(x+t)^2} = \frac{\partial^2 F_2(x+t)}{\partial x^2}.$$

Now $\frac{d^2 F_2(x+t)}{d(x+t)^2}$ is well determined in every point, except for the points on the lines $x+t=nl$ ($n=1, 2, 3 \dots$). If (x, t) is a point on one of these lines

$$\frac{d^2 F_2(x+t)}{d(x+t+0)^2} = - \frac{d^2 F_2(x+t)}{d(x+t-0)^2}$$

and, except for the case that $\frac{d^2 F_2(x+t)}{d(x+t+0)^2} = 0$, there is no second differential coefficient of $F_2(x+t)$, either for $x+t$, x or t .

But there is, if $f(x)$ is well determined for $x=0$ and for $x=l$, a right side and a left side second differential coefficient of $F_2(x+t)$ and the two right side differential coefficients $\frac{\partial^2 F_2}{\partial t^2}$ and $\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}$ are equal and $F_2(x+t)$ satisfies equation (3) if in both the differential coefficients the right side coefficients are taken.

The same conclusions hold for the left side differential coefficients. In other words, in a point on the line $x+t=l$, $F_2(x+t)$ satisfies equation (3) if $x+t=l$ is added to the domain $x+t < l$ and if the variables during the process of derivation do not leave the so formed domain. The line $x+t=l$ may, as well, be added to the domain $x+t > l$. With this restriction, $y = -\frac{1}{2} F_2(x+t)$ satisfies equation (3) also in the points of the lines $x+t=nl$ and, by the same argument and a like restriction, $y = -\frac{1}{2} F_2(x-t)$ is a solution of equation (3), also on the lines $t=x+nl$ ($n=0, 1, 2, 3 \dots$).

Hence the required solution of (2) is

$$y = F_1(x) - \frac{1}{2} \{ F_2(x+t) + F_2(x-t) \}.$$

If, in particular, the second member $f(x)$ is unity, then

$$F_1(x) \equiv \frac{x(l-x)}{2}.$$

The common section of the cylinders $y = -\frac{1}{2} F_2(x+t)$ and $y = -\frac{1}{2} F_2(x-t)$ with the plane $t=0$ consists of parabolic arcs, all congruent with the arc

$$y = \frac{x(x-l)}{4}, \quad 0 \leq x \leq l.$$

For a point on the line $x+t=l$, the left side second differential coefficients of $-\frac{1}{2} F_2(x+t)$ are

$$\frac{\partial^2}{\partial (t-0)^2} \frac{(x+t)(x+t-l)}{4} = \frac{\partial^2}{\partial (x-0)^2} \frac{(x+t)(x+t-l)}{4} = \frac{1}{2}$$

and $y = -\frac{1}{2} F_2(x+t)$ satisfies equation (3), in the domain $x+t \leq l$.

The right side differential coefficients of $-\frac{1}{2}F_2(x+t)$ for the same point are

$$\frac{\partial^2}{\partial (t+0)^2} \frac{(2l-x-t)(x+t-l)}{4} = \frac{\partial^2}{\partial (x+0)^2} \frac{(2l-x-t)(x+t-l)}{4}$$

$= -\frac{1}{2}$ and $y = -\frac{1}{2}F_2(x+t)$ is a solution of equation (3) in the domain $x+t \geq l$.

§ 2. If the second member of the differential equation is a function of t only, so that equation (1) takes the form

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f(t), \quad \dots \dots \dots (4)$$

a particular solution of (4) will be $y = F_1(t)$, where $F_1(t) = \int_0^t dt' \int_0^{t'} f(t'') dt''$.

This solution satisfies the initial boundary conditions: $y = \dot{y} = 0$ for $t = 0$. The condition for the ends, viz. $y = 0$ for $x = 0$ and for $x = l$, t being arbitrary, will be fulfilled too, if we add the solution of equation (3), satisfying the initial conditions, but giving for both ends a value, which destroys the movement of the ends, following from the solution $y = F_1(t)$. To keep the end $x = l$ at rest, we add the cylinder $y = -F_2(x+t-l)$. The intersection of this cylinder with the plane $x = l$ is the curve $y = -F_2(t)$, where $F_2(t) = F_1(t)$ for $t > 0$ and $F_2(t) = 0$ for $t \leq 0$. This cylinder is tangent to the plane $y = 0$ along the generator $x+t=l$. The equation $y = -F_2(x+t-l)$ represents a kind of wave, rising out of the plane $y = 0$ along this generator. The cylinder represents a solution of equation (3) and the addition of this solution to $y = F_1(t)$ gives a solution of equation (4), passing through the straight line $y = 0$, $x = l$, but intersecting the plane $x = 0$ in the curves $y = F_1(t)$ and $y = -F_2(t-l)$. In order to keep at rest the end $x = 0$, we will have to add two cylinders $y = -F_2(t-x)$ and $y = +F_2(t-x-l)$. By this addition the end $x = 0$ is at rest, but the end $x = l$ is only at rest during the time $0 \leq t \leq l$, the complete solution intersecting the plane $x = l$ in the curves $y = -F_2(t-l)$ and $y = +F_2(t-2l)$. If now we add the cylinders $y = +F_2(t+x-2l)$ and $y = -F_2(t+x-3l)$, the complete solution passes through the line $y = 0$, $x = l$, so that the end $x = l$ is at rest; the end $x = 0$ is at rest too during the time $0 \leq t \leq 2l$. Consequently by the addition of a sufficient number of cylinders $y = \pm F_2(t \pm x - nl)$ to the solution $y = F_1(t)$, we get a solution of equation (4), satisfying the boundary conditions for $0 \leq x \leq l$ and $0 < t < t_1$, where t_1 is arbitrary. For a set of values of x and t , so chosen that $0 \leq x \leq l$ and $t > 0$, the contribution to the value of y , given by the applicate of a cylinder

gives a solution of the differential equation, whose second member is $-\sin \frac{t}{\delta}$, satisfying the conditions for the ends and the condition $\dot{y} = 0$ for $t=0$, but not satisfying the condition $y=0$ for $t=0$. Consequently we must add a function $\varphi(x, t)$, giving unity, when substituted in the first member of (5) and satisfying all the boundary conditions (this function has been determined in § 1) and a function $-\delta \psi(x, t)$, the function $\psi(x, t)$ satisfying the equation (3), the boundary conditions for the ends and the initial conditions: $y=0$ for $t=0$, $\dot{y}=+1$ for $t=0$. It is easily proved, that

$$\psi(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, t).^1)$$

and that the discontinuities that present the first differential coefficients of $\delta \psi(x, t)$ on the lines $y=0$, $t \pm x = nl$ are destroyed by the discontinuities that present, on these lines, the first differential coefficients of $\zeta(x, t)$.

Consequently the solution of (5) is

$$y = \varphi(x, t) - \delta \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, t) + \delta^2 \sin \frac{t}{\delta} + \delta^2 \sum_{n=1}^{n=N_1} (-1)^n \sin \frac{t-x-(n-1)l}{\delta} + \\ + \delta^2 \sum_{n=1}^{n=N_2} (-1)^n \sin \frac{t+x-nl}{\delta},$$

where all the terms are bounded.

§ 3. *General case.* If the second member of (1) is a function both of x and t , we may, by putting $\xi = x - t$, $\eta = x + t$, transform the equation (1) in

$$-4 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} = f\left(\frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2}\right).$$

A particular solution of this equation is

$$y = -\frac{1}{4} \int d\xi \int d\eta \left(f\left(\frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2}\right) \right) d\eta + f_1(\xi) + f_2(\eta)$$

or

$$y = F_1(x, t) - f_1(x - t) - f_2(x + t).$$

The arbitrary functions f_1 and f_2 can be so chosen, that $y = \dot{y} = 0$ for $t=0$: we have indeed, to determine these f_1 and f_2 the conditions

$$F_1(x, 0) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} F_1(x, t) \right\}_{t=0} = -\frac{d}{dx} f_1(x) + \frac{d}{dx} f_2(x).$$

¹⁾ CHRISTIAAN HUYGENS 1929—1930, p. 162.

From these conditions results

$$f_1(x) = \frac{1}{2} F_1(x, 0) - \frac{1}{2} \int dx \left\{ \frac{\partial}{\partial t} F_1(x, t) \right\}_{t=0} - C$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2} F_1(x, 0) + \frac{1}{2} \int dx \left\{ \frac{\partial}{\partial t} F_1(x, t) \right\}_{t=0} + C$$

A solution of equation (1), satisfying the initial boundary conditions $y = \dot{y} = 0$ for $t = 0$ is thus

$$y = F_1(x, t) - \frac{1}{2} \left[F_1(x-t, 0) + F_1(x+t, 0) + \int_{x-t}^{x+t} dx \left\{ \frac{\partial}{\partial t} F_1(x, t') \right\}_{t'=0} \right]. \quad (6)$$

This solution of (1) generally does not satisfy the boundary conditions for the ends, because for $x = 0$, y becomes

$$y = F_1(0, t) - \frac{1}{2} \left[F_1(-t, 0) + F_1(t, 0) + \int_{-t}^{+t} dx \left\{ \frac{\partial}{\partial t} F_1(x, t') \right\}_{t'=0} \right] = F_2(t)$$

and, for $x = l$ it becomes

$$y = F_1(l, t) - \frac{1}{2} \left[F_1(l-t, 0) + F_1(l+t, 0) + \int_{l-t}^{l+t} dx \left\{ \frac{\partial}{\partial t} F_1(x, t') \right\}_{t'=0} \right] = F_3(t).$$

Adding to the solution (6) a solution of the equation (3), which destroys the movement of the ends (see § 2) we get for the solution of (1), satisfying all the boundary conditions

$$y = F_1(x, t) - \frac{1}{2} \left[F_1(x+t, 0) + F_1(x-t, 0) + \int_{x-t}^{x+t} dx \left\{ \frac{\partial}{\partial t} F_1(x, t') \right\}_{t'=0} \right] + \left\{ \begin{aligned} & - \sum_{n=1}^{n=N_1} F_2(t-x-(n-1)2l) + \sum_{n=1}^{n=N_2} F_3(t-x-(2n-1)l) - \\ & - \sum_{n=1}^{n=N_3} F_3(t+x-(2n-1)l) + \sum_{n=1}^{n=N_4} F_2(t+x-2nl) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

where N_1, N_2, N_3, N_4 are positive integers, satisfying the conditions

$$\begin{aligned} (N_1-1)2l &< t-x < 2N_1l \\ (2N_2-1)l &< t-x < (2N_2+1)l \\ (2N_3-1)l &< t+x < (2N_3+1)l \\ 2N_4l &< t+x < 2(N_4+1)l \end{aligned}$$

and where the four sums $\sum_{n=1}^{n=N_1}$, $\sum_{n=1}^{n=N_2}$, $\sum_{n=1}^{n=N_3}$, $\sum_{n=1}^{n=N_4}$ are respectively zero if $t-x < 0$, $t-x < l$, $t+x < l$ and $t+x < 2l$.

Once determined $F_1(x, t)$ and $\int_{x-t}^{x+t} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} F_1(x, t') \right\}_{t'=0} dx$, y is found in (7)

by a finite number of operations, N_1, N_2, N_3, N_4 being finite.

This value of y satisfies the boundary conditions, $y = \dot{y} = 0$ for $t = 0$, $y = 0$ for $x = 0$ and for $x = l, t$ arbitrary; y is continuous and possesses first derivatives in the closed domain $G (t \geq 0, 0 \leq x \leq l)$; y is a solution of the partial differential equation (1) in the domain G if $F_2(0) = 0$, $F_3(0) = 0$ and, if $F_2(0) \neq 0$, $F_3(0) = 0$, y is a solution of (1) in each of the closed domains wherein G is subdivided by the lines $t = x$, $t + x = 2l$, $t - x = 2l$, $t + x = 4l$ and so on; if $F_2(0) = 0$ and $F_3(0) \neq 0$, y is a solution of (1) in the closed domains, wherein G is subdivided by the lines $t + x = l$, $t - x = l$, $t + x = 3l$, $t - x = 3l$ and so on; if $F_2(0) \neq 0$ and $F_3(0) \neq 0$, y is a solution of (1) in each of the closed domains wherein G is subdivided by the lines $t \pm x = nl$.

All this only holds if $f(x, t)$ is well determined in the closed domain G .

If the boundary conditions are not those, indicated above, there must still be added to the given solution, a solution of equation (3), satisfying the altered boundary conditions.

Chemistry. — *The salting out of gelatin sols by salt mixtures.* By E. H. BÜCHNER and G. POSTMA. (Communicated by Prof. F. A. H. SCHREINEMAKERS.)

(Communicated at the meeting of May 30, 1931.)

Some time ago, the salting out of agar sols by mixtures of two salts was studied.¹⁾ It was now thought necessary to carry out an analogous investigation of the behaviour which gelatin sols would show in this respect. It is the object of the present communication merely to put on record the results obtained, which will be more fully treated in Mr. POSTMA's thesis.

In principle, the same experimental method was followed as in the previous communication. A solution of sodium sulphate and a solution of an other sodium salt, both of which had a known concentration, were mixed and so much water was added as necessary to make up to 7 cc. The whole was given to 3 cc of a gelatin sol, made by dissolving 1 gram of commercial gelatin in 100 cc water. Several mixtures with varying proportion of the salts having been made, the mixture was noted, which caused immediately the appearance of an opalescence in the gelatin sol as well as that which exactly failed to do so. The difference in composition between these two mixtures did not exceed 0,1 cc or 0,03 mol Na_2SO_4 . As it was necessary to use the strongest solutions possible, the measurements were made at 40°. With the view to easily preparing the mixtures of the two salt solutions, some of which would have crystallised out on cooling, two burettes were placed within a wide glass tube, that could be heated above 40° by an electric current flowing through a wire that was wound externally round the tube.

Although the p_H of the mixture has been shown to have a great influence on the salting out of the gelatin,²⁾ no special measures were taken to make all experiments at the same p_H . All solutions being prepared with the ordinary distilled water of the laboratory and the same gelatin being used, it may be safely assumed that, at least in the experiments with strictly neutral salts, the p_H was approximately equal. In a few cases, it was determined and found to be about 6.

The results obtained are represented in the accompanying diagram in the same way as was previously done with the agar sols. The only difference is that the points in the present diagram represent the mixtures which exactly failed to cause the opalescence. This, however, is quite

¹⁾ BÜCHNER and KLEYN, *These Proceedings*, **30**, 740, 1927.

²⁾ BÜCHNER, *Rec. Trav. Chim.* **49**, 1150, 1930.

irrelevant, if only general conclusions about the effect of salts on agar and gelatin are sought.

When comparing the results with those obtained by BÜCHNER and KLEYN, it is at once seen, that the sequence of the salts is exactly the

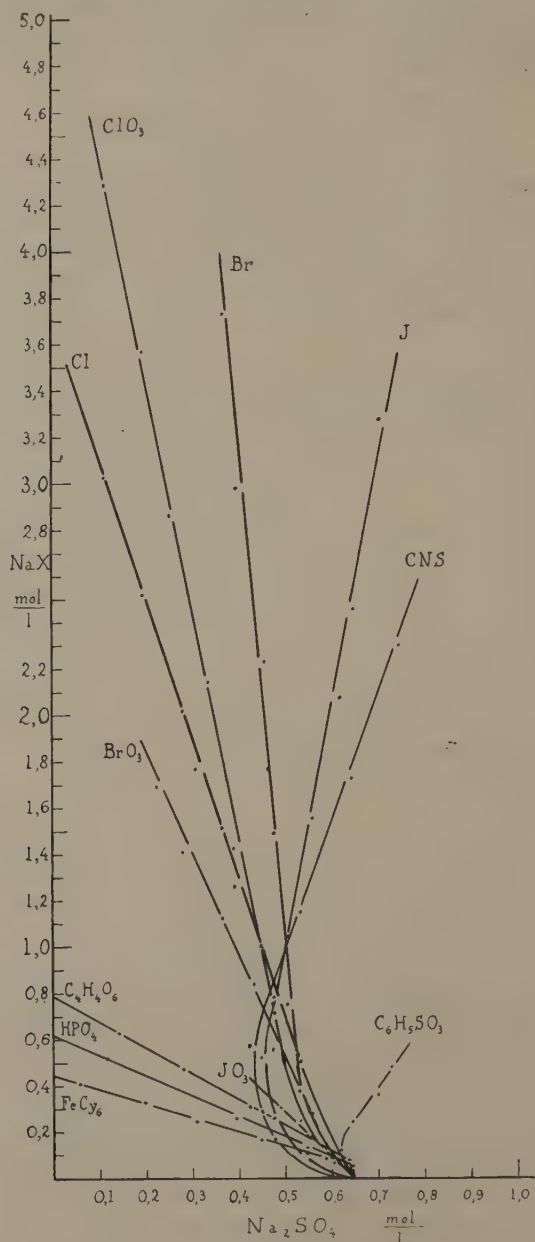


Fig. 1.

same, and that the additive behaviour of the more concentrated solutions observed with the agar sols exhibits itself also in the present case ¹⁾. It may be said, therefore, that a determined quantity of sodium sulphate may be replaced by a definite quantity of another sodium salt, but the relation between these quantities appears to differ, when different colloids are taken. So with agar sols, 0,1 mol of sodium sulphate may be replaced by 0,15 mol of tartrate, whilst with gelatin sols 0,1 mol of sulphate is equivalent to 0,11 mol of tartrate. Still greater differences are encountered, if the lines for the chloride and all salts lying in the diagram on the right side of the chloride are taken in comparison. Whereas these salts counteracted the sodium sulphate in the case of the agar sols, most of them act in the same sense as the sulphate with gelatin sols. In the latter case, only the iodide, the thiocyanate and the benzenesulphonate show the antagonistic effect noted for so many salts with the agar sols. Therefore, the conclusion as to the existence of two groups of salts, that was suggested by BÜCHNER and KLEYN, wants to be modified; when passing from one colloid to another, a salt also may pass from the anti-group to the salting out group. This is the more surprising as it was shown that the groups as distinguished with the agar sols, almost exactly agreed with those found in swelling experiments with gelatin ²⁾. It had therefore been expected that the agreement would have been complete when the salting out effect on gelatin sols was measured.

On the other hand the different directions of the lines for NaBr and for NaI are in agreement with the fact, that according to previous observations gelatin can be salted out by NaBr, but cannot by NaI. Another interesting result, which showed itself already with the agar sols, is confirmed with the gelatin sols and is here even more distinctly and generally to be seen. The curves which are at the higher concentrations of the second salt straight lines, are, when only small quantities of the second salt are present, curved and, very curiously, in different senses for the salts with a strong salting out power and for those having a small or even contrary effect. As is seen from the diagram, the first three curves are concave to the x-axis; the following ones are convex and show a stronger curvature as their salting out power decreases. In connexion herewith, attention may be drawn to the curious fact that a salt like thiocyanate which exhibits at higher concentrations an antagonistic effect, has at very small concentration the strongest salting out effect of all salts tried. Consequently, the lyotropic series is at small concentrations, at least partially, reversed, as has already been observed by others ³⁾,

¹⁾ An excellent proof of this fact is given by the experiments with ferrocyanide, phosphate and tartrate, the salting out power of which could be determined separately with the pure salts.

²⁾ BÜCHNER, *Rec. Trav. Chim.* **46**, 439, 1927.

³⁾ HÖBER, *Physik. Chem. der Zelle*, 5th ed., 324; LENK, *Biochem. Zschr.* **73**, 15 and 58 (1916).

but it is very curious that this phenomenon occurs equally distinctly when the salts are dissolved in water, and so to say, in a solution of an electrolyte. The latter one appears to have no specific influence on the behaviour of the other salts; its effect consists only in diminishing the quantity necessary for salting out the gelatin.

Attention may also be drawn to a few special points. In connexion with the desire of comparing the halides and the halogenates, the iodate, which was not used in the former investigation, was also tried. Although this salt is not very soluble, it is seen that the sequence of the halogenates is exactly the reverse of the order of the halides, the difference between the extreme terms being smaller in the former case. This may perhaps be explained by considering that the halogen atom in the halogenate is to a certain measure enveloped by the oxygen atoms, the properties of the halogen atom being thereby more or less masked.

The benzenesulphonate was investigated as this salt is known to exhibit a remarkably great influence on the swelling of gelatin. In agreement with its promoting effect on swelling, it was found to have a very great antagonistic effect on the salting out.

Amsterdam, Inorganic chemical Laboratory of the University.

Geology. — *Ueber das Rieckesche Prinzip.* Von G. P. ITTMANN und M. G. RUTTEN. (Communicated by Prof. L. RUTTEN).

(Communicated at the meeting of May 30, 1931.)

Wenn in einem Ein-Stoff-System Fest und Flüssig sich in Gleichgewicht befinden, wird ein nur auf die feste Phase wirkender Ueberdruck eine Erniedrigung der Gleichgewichtstemperatur hervorrufen. Auf diese Tatsache ist von vielen hingewiesen worden. Wir wollen hier ROOZEBOOM, JOHNSTONE einerseits und RIECKE andererseits hervorheben. Die Erstgenannten behandelten den Fall, dass nur auf die feste Phase ein allseitig gleicher Ueberdruck wirkte, den JOHNSTON¹⁾ als "*Ungleichförmiger Druck*"

¹⁾ Siehe u. a.: J. JOHNSTON and L. H. ADAMS: Ueber den Einfluss hoher Drucke u. s. w., Zeitschr. f. Anorg. Chem. LXXX. 1913, p. 289.

Wenn die Formel vielleicht auch theoretisch nicht ganz einwandfrei ist, so gibt sie doch eine sehr gute Annäherung, die auch mit den Experimenten überein zu stimmen scheint. Wenn man eine genauere Formel wünscht, dann müssen wir den Einfluss des Volums der flüssigen Phase mehr oder weniger in Betracht ziehen, und bekommen also, nach LEWIS and RANDALL: (Siehe: LEWIS and RANDALL: Thermodynamics, pag. 189. Formel (6)).

$$\begin{aligned} dF_l &= \left(\frac{\partial F_l}{\partial P_l} \right)_T dP_l + \left(\frac{\partial F_l}{\partial T} \right)_{P_l} dT \\ dF_s &= \left(\frac{\partial F_s}{\partial P_s} \right)_T dP_s + \left(\frac{\partial F_s}{\partial T} \right)_{P_s} dT \\ dF_l &= dF_s. \end{aligned} \quad (6)$$

Hier stellen F die Fugazität, P der Druck, und T die Temperatur der flüssigen Phase l und der festen Phase s vor.

Hieraus geht hervor: LEWIS and RANDALL (7):

$$V_s dP_s - V_l dP_l = (S_s - S_l) dT = \frac{-Q}{T} dT \quad (7)$$

Diese Formel liefert bekanntlich bei $P_s = P_l$ die Clapeyronsche Gleichung:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{-Q}{T(V_s - V_l)}.$$

Wenn man nach LEWIS and RANDALL $dP_l = 0$ annimmt, bekommt man ihre Formel (8):

$$\left(\frac{\partial P_s}{\partial T} \right)_{P_l} = \frac{-Q}{T \cdot V_s} \quad (8)$$

Wir schlagen vor den Zusammenhang zwischen dP_l und dP_s in einem bestimmten Gebiete in folgender Weise zum Ausdruck zu bringen:

$$dP_l = \varepsilon dP_s \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1$$

Hieraus geht hervor:

$$\frac{dP_s}{dT} = \frac{-Q}{T(V_s - \varepsilon V_l)}$$

womit alle Möglichkeiten beschrieben werden können.

bezeichnete. Für diesen Fall kam man zu der Formel:

$$\frac{dT}{dP} = \frac{T \cdot V_s}{\Delta H},$$

wo s die feste Phase angibt.

RIECKE¹⁾ behandelte den Fall, dass die feste Phase neben dem Flüssigkeitsdruck einseitigen Zug- oder Druckkräften ausgesetzt ist. Dies ist also eine andere Aufgabe als die von JOHNSTON, und er hat sie mit Berücksichtigung der elastischen Deformationsenergie gelöst. RIECKE fand nach einigen Vereinfachungen, deren Vornehmste wohl die des homogenen Beanspruchungszustandes im ganzen Körper ist, die bekannte Formel:

$$\vartheta = \alpha Z^2$$

wo ϑ die Aenderung der Gleichgewichtstemperatur angibt, Z der einseitige Zug oder Druck, und wo α eine, immer negative Stoffconstante ist.

Von der Grössenordnung dieser Erscheinungen geben folgende Zahlen eine Uebersicht. Bei Eis ist:

Unter gewöhnlichem, homogenem Druck:

$$\Delta T = -0.0076 p$$

wo p in Atmosphären ausgedrückt ist.

Unter ungleichförmigem Druck, nach JOHNSTON:

$$\Delta T = -0.09 p$$

wo p in Atmosphären ausgedrückt ist.

Unter einseitigem Druck, nach RIECKE:

$$\Delta T = -0.0000036 P^2$$

wo P in kg/cm^2 ausgedrückt ist.

¹⁾ Siehe: E. RIECKE: Ueber das Gleichgewicht zwischen einem festen, homogen deformierten Körper und seiner flüssigen Phase, insbesondere über die Depression des Schmelzpunktes durch einseitige Spannung. Nachr. d. Königl. Ges. d. Wissenschaften; Göttingen 1894, pag. 278.

Die Formeln (1), (4) und (5) sind mit einem Fehler behaftet, der aber auf die weiteren Entwicklung keinen Einfluss hat. Es steht nämlich:

$$S \{ (\Theta - p \cos(n, x)) \delta \xi + (Y - p \cos(n, y)) \delta y + (Z - p \cos(n, z)) \delta \zeta \} dS \quad (1)$$

$$S \{ \cos(n, x) \delta \xi + \cos(n, y) \delta y + \cos(n, z) \delta \zeta \} dS \quad (4)$$

$$S \{ \Theta \delta \xi + Y \delta y + Z \delta \zeta \} dS \quad (5)$$

wo immer

$$\int \{ \dots \} dS$$

stehen muss.

Wenn auch die Schmelzpunktserniedrigung bei RIECKE mit der zweiten Potenz des Ueberdruckes steigt, so ist sie doch erst bei 23.000 Atm. ungefähr der Erniedrigung, hervorgerufen durch den ungleichförmigen Druck nach JOHNSTON, gleich.

Die BECKE-GRUBENMANN'sche Kristallisationstheorie stützt hauptsächlich auf das RIECKE'sche Prinzip. Viele konnten sich nicht vorstellen dass die Tragweite dieser Regelung bei Rekristallisation so gross sein konnte, während Andere keine befriedigende Erklärung für alle ihre Beobachtungen durch das RIECKE'sche Prinzip möglich erachteten. SANDER und SCHMIDT¹⁾ schlugen deshalb das Prinzip der Regelung durch Gleitflächenscharen vor; NIGGLI²⁾ versuchte beide Theorien zu verbinden.

Ohne hier die Gleitflächenscharen-Theorie anfallen zu wollen müssen wir doch eins der Beschwerden von WALTER SCHMIDT widerlegen. Er sagt nämlich³⁾ dass die Regelung nach dem RIECKE'schen Prinzip *nur* eine Formregelung sein kann, *nicht* eine Richtungsregelung, so dass zum Beispiel die TRENER'sche Regel nie hierdurch erklärt werden könne. Ausgehend aber von der Formel (15) der RIECKE'schen Abhandlung, und nicht von der bekannten, vereinfachten Formel $\vartheta = aZ^2$ lässt sich eine Richtungsregelung sehr gut erklären. Es heisst da:

$$A \left(\frac{\eta_2}{m_2} - \frac{\eta_1}{m_1} \right) dT - (\omega_2 - \omega_1) dp = - \{ \Theta dx_x + Y dy_y + Z dz_z \} \omega_1 . \quad (15)$$

Wo A das mechanische Aequivalent der Wärme; η_2 die Entropie; m_2 die Masse und ω_2 das spezifische Volumen der flüssigen Phase; η_1 und m_1 die Entropie und die Masse der festen Phase und ω_1 das spezifische Volumen des Körpers im deformirten Zustand sind.

T ist die absolute Temperatur; p der Flüssigkeitsdruck; Θ , Y , Z die auf die Flächeneinheit bezogenen Componenten der auf den festen Körper wirkenden Zug- oder Druckkräfte; x_x , y_y und z_z sind die Hauptdilatationen.

Bei konstantem Flüssigkeitsdruck, und wenn wir nur in der X -Richtung Zug- oder Druckkräfte annehmen, folgt hieraus die Gleichung (17):

$$A \left(\frac{\eta_2}{m_2} - \frac{\eta_1}{m_1} \right) dT = - \Theta \omega_1 dx_x \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Oder, bei Vernachlässigung der Wärmeausdehnung: $= - \frac{\omega_1 \Theta d\Theta}{E_x}$
wo E_x das Elastizitätsmodül in der X -Richtung bedeutet.

Da $\frac{\eta_2}{m_2}$ grösser ist als $\frac{\eta_1}{m_1}$ bekommen wir bei wachsendem Θ , sei es eine Zug- oder eine Druckkraft, stets eine Erniedrigung der Gleichgewichts-

1) Siehe u. a.: WALTER SCHMIDT: Gesteinsumformung. Denkschr. des Naturhistorischen Museums in Wien. Band 3. 1925.

2) GRUBENMANN—NIGGLI: Die Gesteinsmetamorphose I, pag. 464.

3) WALTER SCHMIDT, l.c., pag. 50.

temperatur. Dies kann man sich nach dem VAN 'T HOFF—LE CHATELIER Prinzip dadurch vorstellen, dass sowohl eine Zug- wie eine Druckkraft eine Steigerung der Deformationsenergie bewirkt.

In einem grossen, sich in einem Stressfelde befindenden Gesteinskörper wird wahrscheinlich keine homogene Spannungsverteilung bestehen. Aber wir dürfen doch annehmen dass immer, neben einem grossen allseitigen Druck, einseitiger Druck bestehen bleiben wird. Dieser grosse allseitige Druck kann entweder als homogener Druck auf Fest und Flüssig beide gleich wirken, oder, als ungleichförmiger Druck, sich auf der flüssigen Phase weniger geltend machen. Im ersten Fall wird im allgemeinen eine Schmelzpunktserhöhung bewirkt, im zweiten Fall eine relativ viel stärkere Schmelzpunktserniedrigung. Keine von diesen beiden Kräften aber ist gerichtet. Sie können also nicht als Untergrund für die BECKE-GRUBENMANN'sche Theorie gebraucht werden. Das kann nur geschehen mit dem einseitigen Druck. Ein grosser Teil des Stressses wird also nicht für die Kristallisationsschieferung in Anwendung kommen können.

In der Formel (17) aber kommt die Hauptdilatation in der Richtung des Druckes, oder das Elastizitätsmodül vor. Beide werden aber in einem anisotropen Körper in den verschiedenen Richtungen nicht gleich sein. Hieraus geht hervor, dass wenn ein und derselbe Druck unter übrigens gleichen Bedingungen das eine Mal in der einen, das andere Mal in der anderen kristallographischen Richtung wirkt, nicht die gleiche Schmelzpunktserniedrigung auftreten wird. In der Geologie haben wir einen konstanten, einseitigen Druck der auf mehr oder weniger regellose Kristallaggregate wirkt. Es stellt sich also heraus, dass diesen verschiedenen Orientierungen verschiedene Schmelzpunktserniedrigungen zukommen, dass es eine Richtung gibt, die am wenigsten beeinflusst wird, und in welche die anders orientierten Kristalle versuchen werden über zu gehen. Mit Hilfe des RIECKE'schen Prinzips kann man also sehr bequem eine Richtungsregelung erklären, wie zum Beispiel die TRENER'sche Regel es für Quarz angibt. Beim Quarz der kristallinen Schiefer kennen wir im Zusammenhang mit der Richtungsregelung keine Formregelung, es kommt nur eine Richtungsregelung vor. Bei Glimmer gehen Richtungsregelung und Formregelung Hand in Hand, und wir können recht gut die *Richtungsregelung als das Primäre betrachten, die zuweilen eine Formregelung zu Folge hat*, und zwar bei jenen Mineralien deren Form eine stets ausgesprochene richtungsabhängige ist. Diese Auffassung ist vielleicht einfacher als die, zu sehr verwickelten mechanischen Anschauungen führende, bisher übliche¹⁾.

Utrecht, Mai 1931.

¹⁾ GRUBENMANN—NIGGLI, l.c., pag. 173 u. 174.

History of Science. — *Het instrumentarium, door VAN SWINDEN bij de invoering van het Metrieke Stelsel gebruikt.* Door P. H. VAN CITTERT. (Communicated by Prof. L. S. ORNSTEIN.)

(Communicated at the meeting of May 30, 1931.)

Zooals algemeen bekend is, heeft Prof. VAN SWINDEN een zeer groote rol gespeeld bij de invoering van het Metrieke Stelsel in Nederland. Niet alleen was hij met AENEAE afgevaardigde naar de „Commissie van Maten en Gewichten” te Parijs en nam hij zeer werkzaam deel aan de beraadslagingen van deze commissie, maar ook stelde hij zich tot taak de voordien in Nederland gebruikelijke maten en gewichten zeer nauwkeurig met de nieuwe eenheden te vergelijken. Daartoe liet hij o.a. van de verschillende op het Stadhuis te Amsterdam aanwezige standaarden zeer nauwkeurige copieën vervaardigen, welke copieën hij deels te Parijs met de origineele standaarden en deels in Holland met de door hem voor eigen gebruik medegebrachte secundaire standaarden vergeleek. Na zijn overlijden zijn al deze standaarden, copieën en hulpmiddelen, benevens een aantal instrumenten van andere soort, tegelijk met zijn bibliotheek in Maart 1824 te Amsterdam geveild. In de *„Catalogue des Livres de la Bibliothèque de Feu JEAN HENRI VAN SWINDEN, suivi du catalogue de quelques Instrumens ayant fait partie de son cabinet, et de sa collection très rare de Poids et de Mesures”*, van welke catalogus o.a. een exemplaar bewaard wordt in de „Bibliotheek der Vereeniging ter bevordering van de belangen des Boekhandels” vindt men zeer uitvoerige gegevens omtrent deze werkelijk zeer belangrijke en zeldzame collectie instrumenten. De catalogus vermeldt aan instrumenten in de afdeeling sterrenkunde 9, meetkunde 10, natuurkunde 8, lengtematen 31, inhoudsmaten 5 en gewichten 14 nummers. Van deze 77 instrumenten zijn nu zeer onlangs tien stuks, en wel voor de geschiedenis van de invoering van het metrieke stelsel de meest belangrijke, geïdentificeerd in de uitgebreide verzameling antieke instrumenten van het Natuurkundig Laboratorium der Rijks Universiteit te Utrecht. Deze zijn door Prof. G. D. MOLL op de bovengenoemde veiling aangekocht en bij zijn overlijden aan het Laboratorium vermaakt. In den instrumentencatalogus van 1839 vindt men ze alle tien vermeld, echter staat slechts bij enkele aangegeven, dat ze eigendom van VAN SWINDEN geweest zijn.

Geïdentificeerd zijn de volgende instrumenten:

A. Natuurkunde N^o. 4 (cat. pag. 147):

Eene gewone afwijkingsnaald, lang 155 strepen, voorzien van Nonius en verdeelden Cirkel en besloten in eene koperen doos met glazen dekplaat.

Deze naald heeft, even als de voorgaande, gediend voor de dagelijksche waarnemingen van den Hoogleraar VAN SWINDEN over de declinatie, en is onder de eerste welke door hem tot dit einde zijn gebruikt, zoo als te zien is op bladz. 337 van de Mémoires présentés à l'Acad. Royale des Sciences, t. VIII alwaar dezelve beschreven is.

Op de aangegeven plaats leest men het volgende: „l'Aiguille dont je me sers depuis 1771, a 5 p. 10.6 l.¹⁾ & 4.6 l. de large. Elle pèse, avec la chappe, le nonius & le contrepoids 410 gr. Elle est placée dans une espèce de pupitre fermé, posé sur un pied très-stable, & je me suis assuré par expérience qu'il n'a souffert aucun changement de position”.

Het in de verzameling aanwezige instrument staat in de cat. 1839 vermeld onder No. 268 als: „Een declinatiernaald in koperen doos, J. PAUW, f 27.—”, met de aantekening: „Is een der eerste, die door den heer VAN SWINDEN gebruikt zijn. Zie: Mém. présentés à l'Acad. des Sciences VIII, 337”. Het is gesigneerd: „I. PAAUW Jr. Leydae Fecit”; de afmetingen van de naald zijn in overeenstemming met de opgegeven maten, het dekglas ontbreekt.

B. Natuurkunde, N^o. 6 (cat. pag. 147):

Een Kokertje met eene ongemeen fraaije Kwik-Thermometer, vijf duim lang, gaande tot kokend water en tot 20 graden onder nul, schaal van Reaumur, hebbende een ongemeen kleinen bol, door PAUL, te Geneve, ongemeen gevoelig en naauwkeurig.

Aanwezig is de thermometer, zonder het kokertje. Het is gesigneerd: „PAUL à Genève”. In de cat. 1839 staat het onder No. 496 genoteerd als: „Een kwikthermometer op zilveren schaal, van -20° C. tot $+80^{\circ}$ C. in palmhouten kokertje, PAUL à Genève”, met de aantekening: „Deze thermometer heeft den heer VAN SWINDEN tot versch. proeven gediend”. (De catalogiseering van het meetbereik van -20° C. tot $+80^{\circ}$ C. berust blijkbaar op een vergissing, bedoeld is -20° R. tot $+80^{\circ}$ R.)

C. Lengtematen No. 1 (cat. pag. 149):

Een maghonyhouten Kistje, met rood fluweel gevoerd, waarin eene originele ijzeren Mètre, onder het oog der Kommissie van Maten en Gewigten, te Parijs, door den beroemden LE NOIR vervaardigd, en door dezelfde Kommissie geverifieerd en met haren stempel geijkt, en bovendien met het geheim teeken van de subkommissie, tot het vervaardigen en justeren der Mètres benoemd geweest, en waarvan de Hoogleraar VAN SWINDEN lid was. Dit stuk is derhalve origineel, authentiek, en daardoor zeer precieus, en wel te meer, daar er maar zeer weinige zoodanige stukken gemaakt zijn. Deze Mètre is bovendien verdeeld in Decimètres, Centimètres en eene Decimètre in Millimètres; nog zijn daarop door denzelfden LE NOIR gesneden drie voeten en één duim, oude Parijsche maat, naar de Toise du Perou, komende een gedeelte van dien duim op den koperen vleugel die

¹⁾ Rhijnlandsche duimen en lijnen.

aan de Mètre is geschroefd, te weten, aan iedere zijde één, om de Mètre tegen stoten en slijten te beveiligen, want de Mètre bedraagt maar 3 voeten

11 $\frac{296}{1000}$ lijn, oude Parijsche maat; dus iets minder dan 3 voeten en één duim.

Voor het overige zijn deze verdeelingen wel door LE NOIR, doch niet onder het oog der Kommissie vervaardigd en niet door deze geverifieerd; dezelve staat enkel en alleen voor de lengte der Mètre zelve in.

De aanwezige standaardmeter voldoet geheel aan de beschrijving, alle vermelde bijzonderheden vindt men aan het instrument terug. De bijbehoorende kist is gemerkt: „Mètre, conforme à la Loi du 18 Germinal an 3, présenté le 4 Messidor an 7; F. P. LENOIR”. Cat. 1839 vermeldt onder N^o. 1026: „De oorspronkelijke ijzeren meter door V. SWINDEN uit Parijs medegebracht, en geijkt met het stempel der Commissie van maten en gewichten te Parijs, LENOIR, f 125.—”.

Omtrent de verdeling van drie voet op dezen standaardmeter vermeldt VAN SWINDEN op pag. 550 van zijn „Verhandeling over volmaakte Maaten en Gewigten”: „.....gerekend naar de maat van drie voeten, welke wij op de ijzeren Mètres die wij uit Parijs hebben medegebragt, volgens de Toise de Peru, door den voortreffelijken LENOIR hebben laten steken. . .”

D. Lengtematen N^o. 4 (cat. pag. 149):

Een mahognyhouten Kistje, waarin eene koperen Plaat, waarop in July 1798, door wijlen BRENDER à BRANDIS, door KLEMAN en den Hoogleraar VAN SWINDEN, de Amsterdamsche voet, de Amsterdamsche, Brabandsche en Bruggesche ellen, naar den slaper in het kabinet van maten op het Stadhuis te Amsterdam, met veel zorg gestoken, en naderhand door KLEMAN verdeeld zijn. (Zie de Verhandeling van den Hoogleraar VAN SWINDEN, over Volmaakte Maten en Gewigten, § § 35, 36, 328 en 338.)

N.B. Het is deze plaat, welke door den Hoogleraar VAN SWINDEN, de Heeren AENEAE en LE NOIR te Parijs, met de Toise du Perou is vergeleken geworden. (Zie de evengem. Verhandeling, § § 328 en 339.) en in zoo verre moet zij voor een authentiek stuk gehouden worden.

De aanwezige koperen plaat is gesigneerd „J. M. KLEMAN fecit, Amstd” en draagt aan de eene zijde de Amsterdamsche voet, aan de andere zijde de drie genoemde ellen. Cat. 1839 vermeldt haar onder N^o. 1027 als: „Een koperen plaat, waarop in July 1798 door BRENDER à BRANDIS, KLEMAN en VAN SWINDEN de lengten van de Amsterdamsche, Brabandsche en Brugsche el, volgens den standaard op het stadhuis te Amsterdam gestoken en door KLEMAN naderhand verdeeld zijn, KLEMAN, f 12.—”. In de verhandeling van VAN SWINDEN vindt men zeer uitvoerige gegevens omtrent deze plaat. In de eerste plaats op pag. 59: „..... maar op den overloop bij de Thesaurie, is een koperen, tegen den muur op een stuk marmer gemetselde, plaat, door ADAM STEITZ vervaardigd, waarop ook de Amsterdamsche voet gesneden is. Nog is er in een afzonderlijk vertrek, waar alle de Maaten bewaard worden, en door den kundigen en verdienstelijken

BRENDER à BRANDIS in eene heerlijke orde zijn gebragt, eene koperen plaat, waar op de Amsterdamsche Maat en de voornaamste Maaten van Europa gesneden zijn: verder een ijzeren staaf, die één Amsterdamsche Voet lang is, van de zelfde gedaante als doorgaands de Ellen zijn; en nog eene dergelijke, waarop de Amsterdamsche, Brabandsche en Brugsche Ellen gesneden zijn..... Ik heb die Maaten in July 1798 behoorlijk nagegaan. Ik bevond op den 16 dier maand, den Thermometer op 74 gr. staande, dat de beide voeten, op de gemelde twee kopere platen, volkomen overeenkomen; en dat een koperen halve Amsterdamsche voet, door METZ in 500 deelen naauwkeurig verdeeld, en mij toebehoorende, juist de helft van de meergemelde voeten is. Den 23 daaraan volgenden, heb ik in tegenwoordigheid en met hulp van gemelden BRENDER à BRANDIS en van den konstenaar KLEMAN, die Voetmaat op eene koperen daartoe bereidde plaat overgebragt, ieder onzer de metingen, met eenen fijnen staafpasser en een vergrootend glas meermaalen herhaalende, en na de overbrenginge, nogmaals hermeetende....." Verder op pag. 560: „.....Men heeft in § 35 kunnen zien, met hoe veel oplettendheid ik te werk gegaan ben, om den Amsterdamschen Voet van STEITZ, die thans aldaar tot Standaard dient, op eene koperen plaat overtebrengen. De verdere meetingen, en ook de vergelijking met een wedergade van de groote plaat van STEITZ, die ik bezit, hebben mij doen zien, dat wij in die overbrenging gelukkig geslaagd zijn. Mijne medegedeputeerde AENAE en ik, wij hebben te Parijs, met hulp van den konstenaar LENOIR dezen voet van STEITZ met de ijzeren Toise van Peru vergeleeken, op een dag dat de honderddeelige Thermometer op 22,2° stond, Ik heb lang naderhand dien zelfden Voet onmiddelijk met de ijzeren Mètre vergeleeken". Ten slotte op pag. 568: „Er is in het Kabinet van Maaten en Gewigten op het Stadhuis te Amsterdam een ijzeren Standaard, in de gewone gedaante van eene El, van de Amsterdamsche, Brabandsche, en Brugsche Ellen, die aldaar in gebruik zijn, aanwezig. Ik heb op den 23 July 1798 met den kundigen BRENDER à BRANDIS, en den konstenaar KLEMAN dien Standaard onderzocht: wij zijn in dat onderzoek, dat moeilijk viel, om dat de hiel niet volkomen rechthoekig op de staaf staat, en het uiteinde der staaf niet haaks gevijld is, met alle mooglijke naauwkeurigheid te werk gegaan. Wij plaatsten eene koperen staaf, die niet langer dan de El was, op de El zelve, en teekenden daarop, door middel van een Winkelhaak en snijmes de lengte van de El: vervolgens hebben wij de lengte met een stangpasser gemeeten, en op eene bij voorraad bereidde koperen plaat overgebragt, de lengte na de overbrenging nog eens hermeetende, en met het origineel vergelijkende: zoo dat men op die meetingen al eenigen staat kan maaken".

E. Lengtematen N^o. 5 (cat. pag. 151):

Een maghonyhouten Kistje, waarin eene groote koperen Plaat, door STEITZ vervaardigd, waarop verscheiden Maten gesneden zijn, wier onderlinge verhouding in Amsterdamsche duimen wordt uitgedrukt: zijnde

eene wedergade van de Plaat, welke op het voorn. Stadhuis is, en waarvan denkelijk een exemplaar aan ieder der Burgemeesteren in dien tijd (1769) zal geschonken zijn geworden. Deze Plaat is afkomstig van den Burge-meester FRANCOIS DE WITT, en door zijnen Zoon aan den Hoogleeraar VAN SWINDEN geschonken.

Ook deze plaat is in Utrecht aanwezig. Ze is gesigneerd: „ADAM STEITZ Fecit, Amsterdam 1769. Zijnde de weerga van de Legger op het Stadhuis”. Cat. 1839 vermeldt haar onder N^o. 1029: „Een koperen plaat, waarop de voornaamste voetmaten van Europa gesneden zijn, 1769, STEITZ, fl. 35.—.” In de verhandeling van v. SWINDEN wordt ze vermeld op pag. 324: „STEITZ heeft ook op de plaat die op de overloop van de Thesaurie te Amsterdam in de Muur gemetseld is, een Rhijnlandsche voet gesneden, gelijk mede op eene andere koperen plaat, die in het Stads-Kabinet van Maaten en Gewigten bewaard wordt, en waarvan ik een wedergade bezit”. Verder op pag. 556: Op de groote plaat van STEITS, die in het kabinet van Maaten op het Stadhuis te Amsterdam bewaard wordt, en waarvan ik, gelijk ik gezegd heb, eene wedergade bezit, is onder anderen de Parijsche voet gesneden:”, en ten slotte op de reeds aangehaalde pag. 560.

F. Lengtematen N^o. 6 (cat. pag. 151):

Eene maghonyhouten Doos, waarin:

1e. Een zeer keurige Stangpasser, met Micrometer en Vergrootglazen aan iedere punt voorzien; duidende de nonius van den micrometer de duizendste gedeelten van iedere omwenteling of schroefdraad aan: een zeer keurig stuk.

2e. Eene ebbenhouten Lineaal, waarop de Parijsche, Londensche en Rijnlandsche voeten.

3e. Eene koperen Plaat, waarop de Parijsche, Rhijnlandsche, Londensche en Amsterdamsche voeten, door den Hoogleeraar VAN SWINDEN tusschen stippen gestoken zijn, naar de verhouding die zij (volgens meer-gemelde verhandeling) met de mètre hebben moeten; gelijk mede nog vier decimètres.

4e. Twee doubles Decimètres provisoires, de eene plat; de andere in de gedaante van eene driekantige zuil.

5e. Een exemplaar van de Vergelykings-Tafeln over Maten en Gewigten, door den Hoogleeraar VAN SWINDEN, benevens een MSS. van zijn Ed. bevattende de verklaring van het gebruik des Stangpassers, voor Mètres, Rhijnlandsche en Amsterdamsche voeten, en de beschrijving van de Plaat hier boven gemeld.

Al deze instrumenten, behalve de driekante dubbele decimeter zijn nog aanwezig. Ze staan in Cat. 1839 onder N^o. 1028 vermeld als: „Een kistje waarin: Een stangpasser met schroefmicrometer en vergrootglazen. Een zwarte ebbenhouten maat waarop de Parijsche, Rhijnlandsche en Engelsche voeten, fl. 62.—”. Het genoemde manuscript behelst in de eerste plaats de gegevens omtrent den stangpasser. VAN SWINDEN beschrijft

eerst hoe hij op 27 Nov. 1801 den spoed van de schroef met den meter vergeleken heeft, daarna, eveneens op 27 Nov. 1801 met den Rhijnlandschen voet, vervolgens hoe hij op 14 Oct. 1801 ¹⁾ den spoed in Amsterdamsche maat geijkt heeft, en vervolgens, *zonder vermelding van een nieuwe datum* de ijking in Parijsche en Londensche voeten. Vergelijkt men dit nu met pg. 550 van zijn verhandeling: „.....Hiermede niet vergenoegd, heb ik lang naderhand, te weeten op den 14 October 1801 ¹⁾, eenen keurigen stangpasser gebruikende, gevonden, dat de lengte van dien Parijschen voet.....”, dan is er wel geen twijfel mogelijk of deze stangpasser is degene, welke door VAN SWINDEN bij zijn vergelijkende metingen gebruikt is. Behalve een aantal tabellen bevat het manuscript nog gegevens omtrent de ebbenhouten en koperen maten. Omtrent de „Ebbenhouten-Maat” vermeldt het: „Op de eene zijde is een *Parijsche Voet*, door *stippen* in 144 lijnen verdeeld. De *streepen* wijzen, gemakshalven, de *duimen* en *halve duimen* aan: doch dezelve zijn niet nauwkeurig genoeg gesteld om er na te meeten: zij dienen slechts tot aanwijzing: om te meeten moet men de stippen gebruiken. Op de andere zijde zijn twee maaten: de langste is de Rhijnlandsche voet, door stippen in 144 lijnen verdeeld. De streepen dienen zooals in de Parijsche voet. De kortste is de *Engelsche Voet*, verdeeld door stippen in 120 deelen, en derhalven in *tiende gedeelten* van een duim: doch, door de gewoonte van den voet in 144 deelen te verdeelen, heeft men, bij verzinning, de streepen van 6 tot 6 en van 12 tot 12 stippen gesteld, inplaats van van 5 tot 5 (of halve duimen) en 10 tot 10, of geheele duimen: zoodat de groote streepen $\frac{12}{100}$ van den voet of $\frac{144}{100}$ van den duim aanduiden.²⁾ Deze drie maaten zijn voor mij op deeze Ebbenhouten liniaal, in July 1792 gestookten, te Spa, door Wijlen den Hr. CHOART DE BUZEVAL ³⁾, voormaals *Président de la Cour des Aides*, en wel naar eene zeer keurig verdeelde koperen plaat, door RICHER te Parijs vervaardigd, waarop de drie gemelde voeten door deezen gesneden naar de *Toise de Peru*, en de verdere standaards bij de *Academie des Sciences* berustende. Ik heb die plaat meermalen gezien en bewonderd: ieder voet was met een *Nonius* voorzien.

Ik heb op den kant van die liniaal, zoo nauwkeurig mij mogelijk was, drie provisioneele *décimètres* gestookten.”

En omtrent de „koperen-liniaal” schrijft VAN SWINDEN: „Op de bovenste streep heb ik de lengte van de Parijsche, Rhijnlandsche, Londensche, en Amsterdamsche voeten gestookten; zij zijn bevat tusschen het uiterste stip aan de linkerhand, en de stippen aan de rechterhand gemerkt *p, r, l, a*.

Op de onderste streep zijn vier *décimètres provisoires* tusschen de stippen 1, 2, 3, 4 die alleen gebruikt moeten worden, en niet de streepen, gestookten: eene dier *décimètres* is in *centimètres* verdeeld.”

¹⁾ Cursiveering van mij.

²⁾ Blijkbaar vergist VAN SWINDEN zich hier. Deze breuken moeten $\frac{1}{10}$ resp. $\frac{12}{5}$ zijn.

³⁾ Vergelijk met betrekking tot CHOART DE BUZEVAL, VAN SWINDEN l.c. pg. 68, voetnoot.

G. Inhoudsmaten N^o. 1 (cat. pag. 155):

Een uitmuntend Stel Maten uit Tin, in 1802 door den beroemden FORTIN te Parijs, voor den Hoogleeraar VAN SWINDEN vervaardigd, en wel in die gedaante als zij behooren te zijn, niet voor dagelijksch gebruik; maar om tot naauwkeurige Slapers of Modellen voor eenen Natuurkundigen te verstrekken: dezelve zijn door bovengen. Hoogleeraar zoo door weging met gedistilleerd water, als door de dadelijke meting van de inwendige dimensien nagegaan, en zeer naauwkeurig bevonden. Zij zijn boven dien voorzien van vlakke mat geslepen glazen, om naauwkeurig gedekt en gesloten te kunnen worden: deze Maten zijn: Eene Litre, Demi-Litre, double Deci-Litre, Deci-Litre, demi Deci-Litre; double Centi-Litre en Centi-Litre.

Deze inhoudsmaten worden in de verhandeling van VAN SWINDEN niet genoemd. Cat. 1839 vermeldt ze onder N^o. 1088 als: „Een stel inhoudsmaten van tin, door FORTIN in 1802 voor VAN SWINDEN vervaardigd om als standaard te kunnen dienen, in mahonieh: kistje”. Het vermelde kistje ontbreekt echter.

H. Gewigten No. 1 (cat. pag. 157):

Een zwart sagrijn Foudraaltje, met rood fluweel gevoerd, waarin eene koperen Kilogramme; zijnde dit stuk te Parijs, onder het oog der Kommissie van maten en gewigten, en wel bijzonder van de Subcommissie daartoe opzettelijk benoemd en waarvan de Hoogleeraar VAN SWINDEN lid was, vervaardigd door den uitmuntenden FORTIN; en met den stempel der Kommissie geijkt; zijnde derhalve een origineel en authentiek stuk, en daardoor, gelijk mede om dat er maar zeer weinige dergelijke in de wereld zijn, zeer pretieus.

Het aanwezige gewicht draagt het vermelde ijkstempel. Op de knop is het gemerkt: „Kilogramme”. Het is in 1839 onder N^o. 1068 gecatalogiseerd als: „De oorspronkelijke kilogram door VAN SWINDEN uit Parijs medegebracht en gemerkt met het merk van de Commissie van maten en gewigten aldaar fl. 51.—”.

I. Gewigten N^o. 8 (cat. pag. 157):

Een Pijlgewigt, Hollandsch Trooisch, van een pond, en gaande tot $\frac{1}{16}$ ons of tot 40 azen, en gejusteerd door den kundigen Ykmeester-generaal NAGEL, in July 1798, naar het patroon van GROENGRAGT, zijnde dit stuk door den Hoogleeraar VAN SWINDEN en NAGEL, zeer naauwkeurig nagegaan en vervolgens te Parijs, door den voorn. Hoogleeraar, de Heeren AENEAE en LE FEVRE-GINEAU, tegen het fransch gewigt zorgvuldig vergeleken. Zie Verhandeling over de Maten en Gewigt, § 238. Dit stuk moet derhalve gehouden worden voor een authentiek en origineel stuk; het is ook tegen en met hetzelfde dat de Hoogleeraar bovengen., de verschillende Slapers in den Hage berustende heeft vergeleken: hierbij zijn gevoegd kleiner Gewigten van 4, 3, 2, 1, $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{4}$ engels: 6, 5, 3, 2, 1 en $\frac{1}{2}$ aas gejusteerd door NAGEL, en geverifieerd door den Hoogl. VAN SWINDEN.

Dit voor de geschiedenis van de invoering van het Metrieke Stelsel in Nederland zoo belangrijk stuk is in de Cat. 1839 onder N^o. 1069 eenvoudig geboekt als: „Een pijlgewigt van 1 lb. Hollandsch Trooisch, gaande tot $\frac{1}{16}$ ons of 40 azen. NAGEL. fl. 5.—”. In de bijbehorende doos bevindt zich echter een ongeteekend protocol in handschrift van Prof. G. D. MOLL, luidende: „Hollandsch Trooisch pond, hetwelk gediend heeft ter bepaling van dat gewigt met de Kilogramme. 1 lv. Trooisch = 492.16772 gram. Dit ponds Trooisch huisgewicht is hetzelfde waarvan de Heer VAN SWINDEN in zijne verhandeling over m. en g. zegt (§ 238): Ik had voor mijn vertrek naar Parijs den Ykmeester Generaal van het Trooisch gewigt in Holland, NAGEL, verzocht, mij een pond trooisch met alle naauwkeurigheid te vervaardigen: het komt volkomen overeen met den slaper, die gemelde ijkmeester in zijn verificatien ambtshalven gebruikt. Die verificatie is op den 28 July 1798, met alle mogelijke omzichtigheid, ook voor de onderdeelen van het pond, door gemelden ijkmeester NAGEL, wijlen den Ykmeester van het Amsterdamsch gewigt ZILVER, den kundigen BRENDER à BRANDIS en mij geschied. Dezelfde slaper komt ook overeen met dien welke door den Ykmeester GROENGRAGT gebruikt werd. LEFEVRE GINEAU, mijn medegedeputeerde AENAE, en ik, wij hebben te Parijs, het pond trooisch, voor mij door den Ykmeester NAGEL vervaardigd, tegen de eenheid van de gewigten die tot het bepalen der Kilogramme gediend hebben en met dezelfde balans die toen gebruikt is vergeleken, en door vijf proeven, waarvan de uitersten maar 2 millioenste gedeelten van de eenheid van elkanderen bevonden 0,E491776”. VAN SWINDEN vervolgt nog in zijn verhandelingen: „Waaruit volgt..... 3e. Dat de Kilogramme gelijk is aan 2 lb., 031827 Na mijn terugkomst uit Parijs heb ik het bewuste Pond Trooisch Gewigt weder met den Dormant van den Ykmeester NAGEL vergeleken, en bevonden dat hetzelfde volkomen daarmee gelijk is: zoo dat ik zeker ben, dat dit Gewigt niets door de reis geleden heeft” (Verhandelingen enz. pg. 405).

J. Gewigten N^o. 12 (cat. pag. 159):

Een Engelsch Trooisch Pond, in groen robbenvellen Doosje.

Omtrent dit gewicht, dat gemerkt is: „British Troy Pound = 5760 Grains, from His Majesty's Mint” vermeldt de Cat. 1839 onder N^o. 1070: „Een Engelsch Trooisch gewigt (pond) in een robbenvel foudraal fl. 6.—”.

In het artikel: „Over den Kilogramme en de vergelijking van denzelven met het Hollandsch en Engelsch Trooisch en eenige andere gewigten” van G. D. MOL ¹⁾ zijn omtrent de instrumenten H, I en J nog nadere gegevens te vinden. Omtrent H schrijft deze: „De derde kilogramme was het eigendom van den voortreffelijken VAN SWINDEN, insgelijks afgevaardigde van dit land naar de Commissie te Parijs. Na het overlijden van dien beroemden man, is dezelve in openbare veiling verkocht, en voor

¹⁾ Bijdragen tot de Natuurkundige Wetenschappen 6, 119, 1831.

f 51. in mijn bezit gekomen; het is no. 1 van de gewigten op den catalogus. Dezelve was nimmer uit de handen van den zorgvuldigen VAN SWINDEN geweest, en vóór de verkooping had men niet toegelaten, dat dezelve door onreine handen werd bezoedeld. Toen de koop was toegeslagen, ging dezelve onmiddelijk uit de handen van den Hoogleeraar VROLIK in de mijnen over. Sedert heb ik hetzelfde nooit met handen, maar altijd met eene palmhouten vork aangevat. Ik ben voornemens, hetzelfde in het vervolg slechts bij enkele gelegenheden te gebruiken, en te zorgen, dat hetzelfde even gaaf in de handen mijner opvolgers kome, als ik hetzelfde heb ontvangen." Verder omtrent I: „.....Dit Trooisch pond of pijl gewigt, hetwelk de Heer VAN SWINDEN een schoon stuk noemt, komt op den Catalogus van de verkooping van dien beroemden man onder No. 8 van de gewigten voor. Op het doosje, waarin het bevat is, had hij eigenhandig geschreven: *Trooisch gewigt van NAGEL zeer pretieus*. Voor hoe *pretieus* onze landgenooten zulke zaken houden, blijkt uit den prijs van vijf guldens, die ik voor dat *schoone* stuk heb besteed. Men zal hetzelfde later in een mahoniehouten kistje vinden, voorzien van een uittreksel van hetgene de Heer VAN SWINDEN omtrent hetzelfde zegt in zijn werk over maten en gewigten." En tenslotte omtrent J: „.....In 1818 werd er, namens het Engelsche Gouvernement, aanvraag bij Raden en Generaal-Meesteren der Nederlandsche Munt gedaan, om mededeeling van den standaard van het gewigt, hier te lande bij het Muntwezen, het goud en het zilver in gebruik. Raden en Generaal-Meesteren voldeden hieraan door het zenden van een standaard pond Hollandsch Trooisch, vervaardigd door den Ykmeester T. A. NAGEL, en verzochten wederkeerig een standaard van het Engelsch Trooisch pond te mogen hebben. Men zond dan uit Engeland twee zulke standaards van koper, in robbevellendoosjes, behoorlijk door de officieren der Londensche Munt als standaards gecertificeerd; op elk derzelve is gegraveerd: „British Troy pound = 5760 Grains from His Majesty's Mint." Een van deze twee is op de verkooping van den Heer VAN SWINDEN onder No. 12 van de gewigten voorgekomen, en thans in mijne handen."

Uit deze citaten blijkt, dat althans deze drie standaardgewichten, en dus zeer waarschijnlijk ook de overige instrumenten door G. D. MOLL *persoonlijk* op de veiling VAN SWINDEN aangekocht zijn. Daar MOLL zijn particulier instrumentarium bij zijn overlijden aan het Natuurkundig Laboratorium der Utrechtsche Universiteit naliet, is dit Laboratorium op deze wijze in het bezit van deze historisch zoo belangrijke collectie gekomen.

Er is wel geen twijfel mogelijk of de bovengenoemde instrumenten zijn afkomstig uit de „Collectie VAN SWINDEN". Waar juist de meest belangrijke instrumenten, welke betrekking hebben op de invoering van het Metriek Systeem in Nederland (No. C, D, E, F, H en I) behouden zijn, en de rol, welke deze instrumenten bij de invoering gespeeld hebben, volkomen bekend is, mag men hier van een „Historisch Monument voor de Invoering van het Metrieke Stelsel In Nederland" spreken.

Naschrift.

Door vriendelijke bemiddeling van den Heer C. J. v. D. BERKHOF, Notaris te Utrecht en van den Heer E. HOMOET, Administrateur bij het College van Curatoren te Utrecht, kwamen wij in het bezit van het volgende afschrift van het testament van G. D. MOLL:

AFSCHRIFT.

Utrecht, den 15 Februari 1838.

Onder geleide dezes hebben wij de eer UEd. Groot Achtb. aan te bieden, de testamentaire beschikkingen van wijlen den WelEdelHooggeleerden Heer G. MOLL in leven Hooggeleeraar, aan 's rijks Hoogeschool alhier, voor zooverre, die beschikkingen de belangen derzelve Hoogeschool betreffen.

de Executeuren in de nalatenschap
van den Heer G. MOLL.

(get.) F. A. VAN HALL.
„ Y. D. C. SUERMONDT.
„ G. D. MARTENS.
„ VAN SCHERMBEEK.

Aan Heeren Curatoren van rijks Hoogeschool
te
Utrecht.

UITTREKSEL.

Ik ondergeteekende, GERRIT MOLL, Hooggeleeraar aan de Hoogeschool te Utrecht, aldaar wonende aan de Lange Nieuwstraat, begerende bij uitersten wil te beschikken over mijn tijdelijke natelatene goederen, heb gemaakt dit mijn tegenwoordig Testament als volgt:

Ik begeer dat al de gedrukte boeken, welke in mijne nalatenschap zullen gevonden worden, aan de Bibliotheek van 's Rijks Hoogeschool te Utrecht zullen worden afgegeven, gelijk ook al mijne Physische en astronomische instrumenten aan gemelde Hoogeschool ten gebruike zullen moeten worden gegeven; edoch is mijne stellige begeerte dat in geval in vervolg van tijd, die Hoogeschool mogt worden gesupprimeerd, die Boeken en Instrumenten als dan publiek zullen moeten worden verkocht, en het daarvan afkomende montant van gelden aan mijne geïnstitueerde erfgenamen, of derzelve descendente uitgereikt.

Verzoekende enz.

(get.) VAN SCHERMBEEK.
Notaris.

UITTREKSEL.

Voor JACOB HENDRIK VAN SCHERMBEEK, en zijnen ondergeteekenden Ambtgenoot JAN GYSBERT BUDDINGH, beide openbare notarissen, binnen Utrecht resideerende, en in tegenwoordigheid van de twee nagenoemde en mede ondergeteekende getuigen:

Is gecompareerd:

De WelEdele Hooggeleerde Heer GERRIT MOLL, Hoogleeraar aan 'S rijks Hoogeschool te Utrecht, ridder van de Koninglijke orde van den Nederlandschen Leeuw, wonende te Utrecht, aan de Lange Nieuwstraat. Wijk A. Nommer 371 gezond van ligchaam en verstand en volkomen in staat tot het maken van testamentaire beschikkingen, zooals dit aan de beide voornoemde Notarissen en de twee nagenoemde getuigen ten duidelijksten is gebleken; dewelke aan dezelve Notarissen ten bijwezen dier getuigen, heeft opgegeven en gedictieerd zijn nader testament als volgt:

Ik geef en legateer alle boeken in mijne nalatenschap gevonden waarvan reeds exemplaren voorhanden zijn in de Bibliotheek van 's-rijks Hoogeschool te Utrecht, — aan de Bibliotheek van het Koninglijk Nederlandsch Instituut te Amsterdam.

Ik geef en legateer aan de Bibliotheek der Hoogeschool te Utrecht al mijne Land en Zeekaarten, pourtraiten enzovoorts.

Ik begeer dat het model van den Scheeventoren te Pisa en het Klokje van HUYGENS in mijnen boedel gevonden wordende, zullen gerekend worden te behooren, tot de Instrumenten, waaromtrent door mij bij mijn voormeld testament, in het belang der voormelde Hoogeschool beschikkingen zijn gemaakt.

Ik legateer aan de eerste Klasse van het Koninglijk Nederlandsch Instituut te Amsterdam, het pourtrait in olieverf van CHRISTIAAN HUYGENS, hetwelk bij mij in de zijkamer hangt, mits hetzelfde op een geschikte plaats in het Hotel van het Instituut worde opgehangen.

Ik enz.

(get.) VAN SCHERMBEEK,
Notaris.

SUMMARY.

In the collection of antique instruments of the Physical Institute of the University of Utrecht some instruments have been identified, which have been used in 1798—1800 by Prof. VAN SWINDEN for comparing the measures and weights, which were then in use in Holland, with the new metric measures and weights. After the death of VAN SWINDEN these instruments have been obtained in 1824 on public auction by Prof. MOLL of Utrecht and have been left by will in 1838 to the Physical Institute of the Utrecht University.

Botany. — *Blutungserscheinungen bei Pflanzen.* Von J. G. HEYL. (Communicated by Prof. F. A. F. C. WENT.)

(Communicated at the meeting of May 30, 1931.)

Unter den vielen Theorien über die Ursachen der Blutungserscheinungen ist eigentlich keine, die das Problem in Uebereinstimmung mit den von vielen Autoren gefundenen Tatsachen vollständig erklärt; was möglicherweise daher rührt, dass die Resultate der experimentellen Untersuchungen so wenig mit einander im Einklang stehen. In vorliegender vorläufigen Mitteilung mögen, in gedrängter Form, einige Versuche zur weiteren Kenntniss des Blutens besprochen werden.

Methodik.

Um ein genaues Bild der Erscheinungen zu bekommen, benutzte ich eine selbstregistrierende Methode, wobei, unter übrigens konstanten Aussenbedingungen wie Druck, Feuchtigkeit u.s.w., jede 0.01 cc. abgeschiedene Menge Blutungssaft registriert wurde; gleichzeitig hiermit wurden die Minuten registriert.

Die Versuche fanden in folgender Weise statt.

Die Versuchspflanzen (*Sanchezia*, *Ricinus*, später auch *Brassica*, (Weisskohl)) wurden unter Wasser dekapitiert und mittels eines Gummischlauches über dem oberirdischen Stengelteil an das Glasrohrsystem des Apparats angeschlossen und die Anschlussstelle mit einem Gemisch von Harz und Wachs luftdicht gemacht.

Die abgeschiedene Menge Blutungssaft tropfte aus einem Kapillarröhrchen von bestimmter Tropfengrösse (0.01 cc). Fällt der Tropfen ab, so wird er aufgefangen auf das Löffelchen am Ende eines Hebels, der in seinem Stützpunkt genau ausbalanciert ist.

Durch das Tropfengewicht sinkt der Hebel bis auf eine, auf konstantem Niveau bleibende, Wasserhöhe, wo der Tropfen abgegeben wird. Gleichzeitig wird, mittels einer offenen Quecksilberleitung, ein Schwachstrom geschlossen. Durch ein Relais wird der Schwachstrom umgesetzt in Starkstrom, der den Schreibmagnet in Wirkung bringt. Der Schreibstift am Anker schlägt drei untereinander stehende Punkte an die Oberseite eines langsam fortschiebenden Papierbandes, wie bei einem Telegraphen. Ein Magnet zieht den Hebel wieder in seine ursprüngliche Lage zurück.

An die Unterseite des Bandes wird jede 60 Sekunden ein ähnliches Zeichen geschlagen.

Die Laboratoriumsuhr gibt jede Sekunde Kontakt mittels eines Magneten

und durch ein Rad mit 60 Zähnen werden die Sekundenkontakte in Minutenkontakte umgesetzt, die Letzteren werden registriert.

In dieser Weise erfolgt eine genaue Registrierung des ganzen Blutungsverlaufs, und jede Reaktion wird augenblicklich sichtbar. Für konstante Feuchtigkeit wurde Sorge getragen; es fand automatische Begiessung statt.

Ein, speziell zu diesem Zwecke konstruierter, Toluolthermograph schrieb die Bodentemperatur auf berusstes Papier, ein normal Thermograph gab die Lufttemperatur an; beide wurden durchwegs an Thermometern kontrolliert.

Für Versuche über einen Einfluss von Druckänderungen benutzte ich kompromierte Luft oder Saugung einer Quecksilbersäule.

Jede beliebige Temperaturänderung erfolgte durch Erhitzung des Topfes mit Dampf, Abkühlung durch Leitungswasser oder Eis. Zur Ausschaltung schädlicher Laboratoriumsluft, besonders von Leuchtgas, wurden die Versuche in einem, zum Experimentieren eingerichteten Gewächshause angestellt.

Die tägliche Periodizität.

Wenn man die Angaben von verschiedenen Autoren über die Ursachen der täglichen Periodizität berücksichtigt, so begegnet man eigentlich nirgends die Temperatur als möglichen Faktor vermerkt.

HOFMEISTER sprach von rhythmischen Aenderungen der Permeabilität der Plasmamembrane, ohne Einfluss äusserer Faktoren; erbliche Gründe sind von BROSIG angeführt. BARANETZKY kam auf Grund seiner Untersuchungen zur Ueberzeugung, dass Lichtwechsel die Ursache ist, (ob schon in seinen Tabellen mehrere Male dauernd 12 oder mehr Stunden eine konstante Blutung bei konstanter Temperatur zu beobachten ist, was er aber in seinen Kurven und im Text nicht angibt). ROMELL zieht aus seinen eingehenden Versuchen in 1918 den Schluss, dass die tägliche Periodizität als rein autonom anzusehen ist.

In Fig. 1 sieht man die Blutung einer Ricinuspflanze angegeben. In den Abbildungen sind die Tropfen von 0.01 cc. auf der Abzisse, die für jeden Tropfen benötigte Ausflusszeit auf der Ordinate eingetragen. Eine sinkende Linie bedeutet also eine *Beschleunigung* der Blutung, eine steigende eine *Verzögerung*. Hiermit zusammenhängend ist die Temperaturkurve auch immer umgekehrt eingezeichnet.

Der Versuch dauerte 12 Stunden von Abend bis Morgen, also im Verlaufe eines Minimums. Es erfolgt aber bei \pm konstanter Temperatur eine vollkommen regelmässige Blutung; abgesehen von immer auftretenden Oscillationen zeigt die Kurve sich als geradlinig.

Es hat sich mir jetzt überhaupt in vielen Versuchen gezeigt, dass, unabhängig von der Tageszeit, die Blutung immer parallel der Temperatur verläuft.

Auf Grund dieser Befunde lag die Annahme nahe, dass die Periodizität

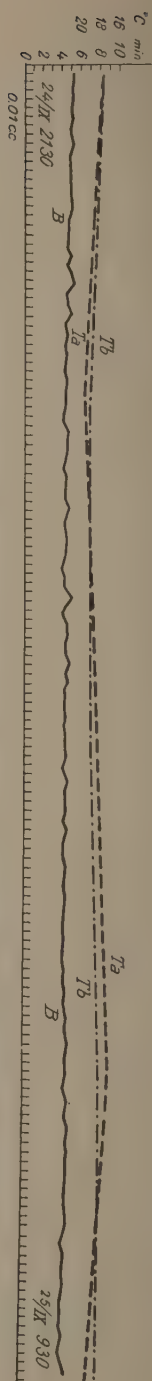


Fig. 1. Nachperiode einer Ricinus-pflanze von 21.30 24 IX ~ 9.30 25 IX bei \pm konstanter Temperatur.
Erklärung im Text: B = Blutungskurve. T_a = Lufttemperatur. T_b = Bodentemperatur.

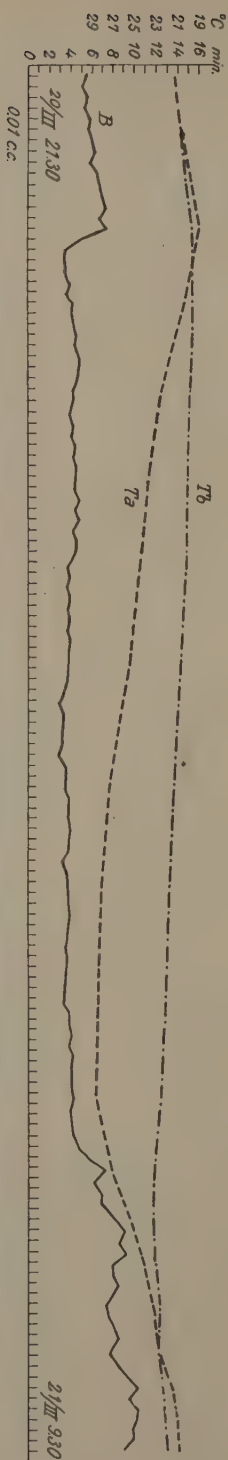


Fig. 2. Nachperiode einer Brassica von 21.30 20/III ~ 9.30 21/III bei anfangs steigender und später sinkender Temperatur.
Erklärung im Text: B = Blutungskurve. T_a = Lufttemperatur. T_b = Bodentemperatur.

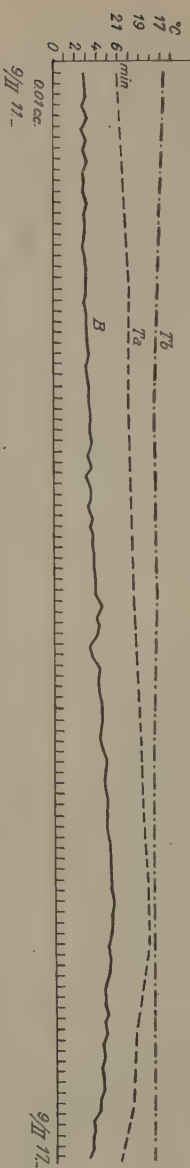


Fig. 3. Blutungskurve (B) einer Brassica bei schwankender Lufttemperatur (T_a) Bodentemperatur (T_b) \pm konstant.
Versuchsdauer 11 ~ 17 9/II.

entsteht durch Schwankungen der Temperatur, was aber an Umkehrversuchen erst völlig bewiesen werden konnte.

Fig. 2 gibt einen solchen Umkehrversuch mit *Brassica*, im Laufe einer Nacht wieder.

Eine steigende Temperatur bis nach Mitternacht, ein mehr oder weniger rasches Hinabsinken gegen den Morgen.

Auch hier findet man eine deutliche Uebereinstimmung zwischen Temperatur und Blutung; jedoch sind die Oscillationen etwas stärker ausgesprochen, (ich werde das später noch erklären). Aus diesen Tatsachen muss man den Schluss ziehen, dass von einer autonomen Periodizität im Sinne ROMELL's keine Rede ist.

Betreffs der möglichen Ursache unserer so verschiedenen Ergebnisse möchte ich darauf hinweisen, dass die von ROMELL benutzte Versuchspflanze *Brassica* ein zum Bluten sehr geeignetes Objekt ist, dass sie aber ausserordentlich stark und rasch reagiert auf schon geringe Temperaturänderungen in der Atmosphäre.

Fig. 3 z.B. gibt das Bild einer Blutungskurve von *Brassica* bei schwach schwankender Lufttemperatur und fast gleichbleibender Bodentemperatur.

Man sieht die Blutungskurve der Lufttemperatur genau parallel verlaufen. Mit dieser Eigentümlichkeit sind leicht die grösseren Oscillationen im obenerwähnten Umkehrversuch zu erklären, und möglicherweise liegt in diesem Umstand auch der Grund für ROMELL's Annahme einer autonomen Periodizität.

Innerhalb der Temperaturgrenzen des Lebens darf man also annehmen, dass die Blutungsintensität stark von der Temperatur induziert wird; wobei Erhöhung eine Beschleunigung, Erniedrigung eine Verzögerung zur Folge hat. Ausserdem ist die Blutung bei einer bestimmten Temperatur abhängig von derjenigen Temperatur, bei welcher die Pflanze vorher verweilt hat. (Siehe auch Fig. 4.)

Sowie die obere Temperaturgrenze des Lebens erreicht wird, nimmt die Blutung rasch ab bis zu einem vollkommenen Stillstand; daraufhin geht die Pflanze meist zu einer Aufsaugung der Flüssigkeit über, wenn die hohe Temperatur ununterbrochen einige Zeit einwirkt. Bei kurzer Einwirkung tritt eine Wiederherstellung ein.

Die Verhältnisse zwischen Temperatur und Blutungsgeschwindigkeit findet man in Fig. 5 für *Brassica* (B) und *Sanchezia* (S) gezeichnet.

Von einem bestimmten Anfangspunkt ausgehend, nimmt die Blutung ziemlich regelmässig bis zum Optimum zu, um danach mehr oder weniger rasch bis zur vollkommenen Hemmung bei ungefähr 55° C. abzunehmen. Die Optimumpunkte sind stark abhängig von individuellen Differenzen der Versuchspflanzen. Schon DETMER hat auf die weit auseinander liegenden Grenzen der Optima hingewiesen. Meiner Erfahrung nach variieren die Optima zwischen 30—40° C.; ebenso können die Maximumtemperaturen ziemlich verschieden sein; die meist Vorkommenden sind 50—60° C.

Bei Erwärmung des oberirdischen Stengelteilcs, indem man unterdessen die Wurzeln unter konstanten Bedingungen hält, tritt eine direkte Reaktion

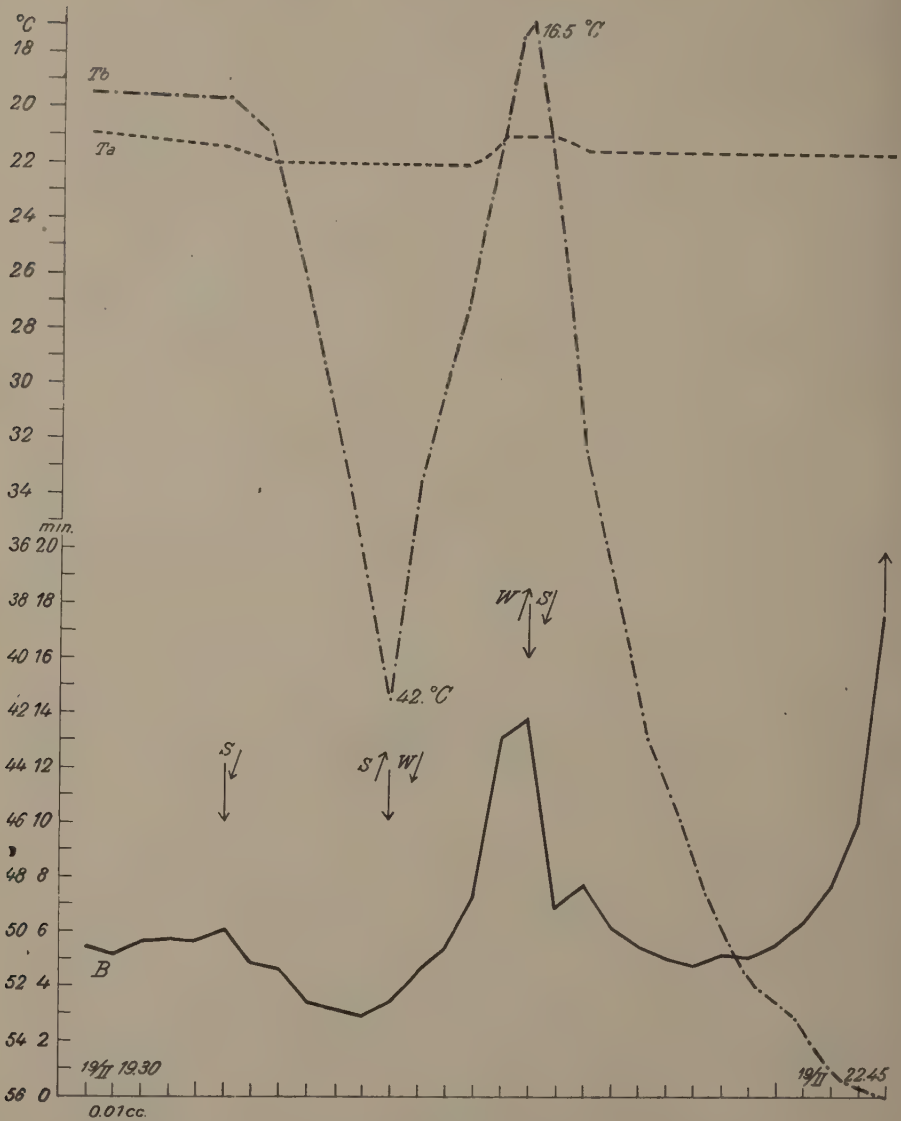


Fig. 4.

Blutungskurve (B) einer Brassicapflanze bei \pm konstanter Lufttemperatur (T_a) und stark schwankender Bodentemperatur (T_b). Versuchsdauer 19.30 — 22.45 19/II. Bei $S \downarrow$ Erhitzung durch Dampf; bei $S \uparrow W \downarrow$ Aufhören der Erhitzung und Abkühlung mittels Leitungswasser, das gegen den Topf spritzt und direkt wieder abgeführt wird; bei $W \uparrow S \downarrow$ Aufhören der Abkühlung und Wiedereinstellung der Erwärmung.

in der Form einer Beschleunigung auf. Bald aber geht die Blutung wieder zurück. Bei stärkerer Erhitzung folgt eine vollständige Hemmung. Hört die Erwärmung auf, so stellt sich das Gleichgewicht wieder langsam ein und nimmt die Blutung ihren früheren Wert wieder an.

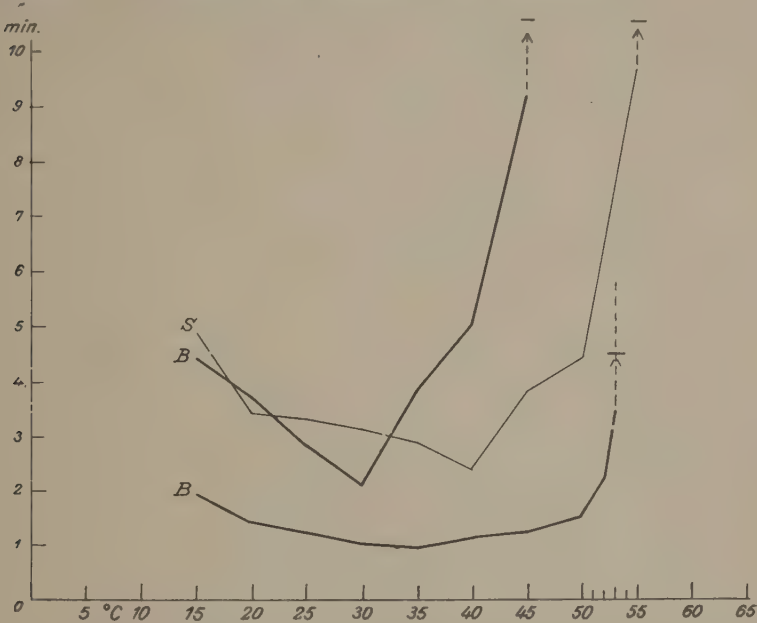


Fig. 5.

Temperatur und Blutungsgeschwindigkeit für *Brassica* (B) und *Sanchezia* (S).
Bei jeder Temperatur ist die Ausflusszeit für 0.01 cc. in Minuten angegeben.

Begießt man den Topf einer Versuchspflanze mit einem beliebigen Plasmolyticum (z.B. Saccharose in 10—15%-tiger Lösung) so erfolgt augenblicklich eine Aufsaugung des Wassers aus den Röhren. Zum Registrieren dieses Aufsaugens benutzte ich ein, genau in 0.01 cc. kalibriertes Röhrchen, dass sich vor einer, mit bestimmter Geschwindigkeit rotierenden Trommel mit Bromidepapier befand. An der anderen Seite der Kapillare war eine Lampe, die jede Minute, während einer Sekunde, einen Lichtstrahl aufs Papier warf. Jede Minute wurde also die Verschiebung eines Luftbläschens in der Kapillare als Schattenbild photographiert.

Setzt jetzt, während einer, auf künstlichem Wege verursachten Saugung, Temperaturerhöhung resp. -Erniedrigung ein, so verhält sich die Reaktion entgegengesetzt zum Vorgang bei normaler Blutung; nämlich, Temperaturerhöhung hat verzögernde Saugung zur Folge, Abkühlung eine Beschleunigung (nur bei lebenden Pflanzen).

Bei konstanter Temperatur ist die Saugung regelmässig.

Betreffs des Einflusses elektrischer Ströme (höchstens 220 Volt und 6 Amp. Gleichstrom) möchte ich erwähnen, dass ein Strom, mit den Wur-

zeln durch 2 Kupferstäbe an beiden Seiten des Topfes in Verbindung gebracht, die Blutung vollständig hemmt, wenn ein Widerstand (z.B. eine Lampe) mitverbunden ist, sodass keine Temperaturerhöhung auftritt. (Spannung zwischen den Kupferstäben mit eingeschaltetem Widerstand, wechselnd 120—180 Volt und ± 0.02 Amp.) Wird der Widerstand aber ausgeschaltet, was, infolge Spannungs- und Stärkevermehrung, (bis 220 Volt und 0.2—0.5 Amp.) eine rasche Temperatursteigerung im Topfe verursacht, so geht die Blutung augenblicklich parallel der Temperatur.

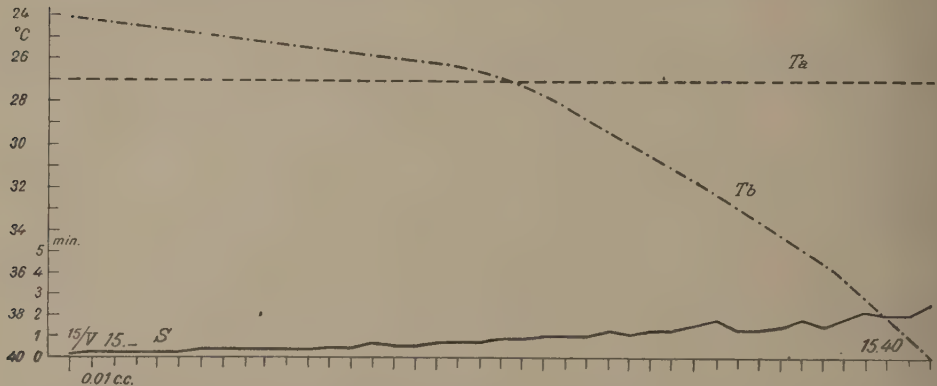


Fig. 6.

Saugungskurve (S) einer *Sanchezia* bei konstanter Lufttemperatur (T_a) und anwachsender Bodentemperatur (T_b). Versuchsdauer 15. — 15.40 15/V.

Meine Versuche über die Reaktionen durch Druckänderungen auf die Dekapitationsfläche hervorgerufen, stimmen vollkommen mit denjenigen ROMELL's überein. Es zeigt sich wirklich keine Spur einer stimulierenden Wirkung, wie CHAMBERLAIN dachte annehmen zu können. Die nicht vitalen Anfangsreaktionen sind immer sehr heftig, aber dann tritt bald die normale Blutung wieder ein ohne irgend eine Vermehrung der Blutungsintensität; ROMELL erwähnt am Ende seiner Mitteilung einige abweichende Resultate bei *Brassica*, die zu einer Annahme einer Reizwirkung berechtigten würden.

Es ist mir nicht gelungen, damit übereinstimmende Tatsachen zu bekommen; *Brassica* betragt sich ganz so, wie andere Pflanzen.

Eine nähere Erklärung dieser Tatsachen hoffe ich später in einer mehr ausführlichen Form zu publizieren.

Utrecht, Mai 1931.

Botanisch Laboratorium.

LITERATURVERZEICHNIS.

- BARANETZKY: Ueber die tägliche Periodizität des Blutens 1872.
 CHAMBERLAIN: Recherches sur la sève ascendante 1897.
 FREY—WYSSLING: Berichte d. deutschen Botanischen Gesellschaft, Bnd. 47, 1929.
 HOFMEISTER: Flora, Bnd. 42, 1862.
 ROMELL: Svensk Botanisk Tidskrift, Bnd. XII, H. 3 en 4, 1918.
 WIELER: COHN's Beiträge zur Biologie der Pflanzen VI, 1893.

Psychology. — *Ueber die Natur der optischen und haptischen Formwahrnehmung.* Von G. RÉVÉSZ. (Communicated by Prof. B. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of May 30, 1931).

I.

Das Interesse für das Gebiet der optischen Täuschungen hat sich seit ZÖLLNER und OPPEL nicht verringert. Beinahe jeder neue Gedanke in der *Raumpsychologie* frischte das Interesse für die Täuschungen wieder auf; alte Untersuchungen wurden wiederholt, neue Phänomene entdeckt und der ganze Fragenkomplex von der neuen Anschauung aus revidiert. Selbst *aesthetische* Betrachtungsweisen haben in das Gebiet der optischen Täuschungen neues Leben gebracht, wie sich das bei LIPPS deutlich zeigte¹⁾, und neuerdings sind auch Fäden zur *Entwicklungspsychologie* gezogen worden, als es mir gelang, optische Täuschungen bei Tieren zuerst nachzuweisen²⁾. Schwierigkeiten waren auf der Tagesordnung, und die Theoretiker kostete es keine geringe Mühe, diese zu überwinden, oder wenn das nicht gelingen wollte, sie aus ihrer Problematik kunstgerecht auszuschliessen.

Und trotz des grossen Interesses und der zahllosen Beobachtungen scheint das Kernproblem der Täuschungen endgültig nicht gelöst, ja sogar nicht einmal scharf formuliert zu sein.

II.

Es ist bezeichnend, dass Täuschungserscheinungen bisher beinahe ausschliesslich auf *optischem* Gebiet studiert worden sind. Eine Ausnahme bilden JAENSCH, PEARCE, COOK, GEMELLI, usf., die zwei von der bekanntesten Täuschungen, nämlich die Kundtsche und die Müller-Lyersche auf taktilem Gebiet untersucht haben, allerdings ohne aus ihren Ergebnissen Konsequenzen für die Raumlehre zu ziehen. Mit der Einseitigkeit der Forschungsrichtung hängt es zusammen, dass alle Theorien, die für die Erklärung der Täuschungen aufgestellt worden sind, sich an der Funktionsweise der Sehorgans, resp. an der Natur des optischen Wahrnehmungsprozesses orientieren. Als Bausteine für eine allgemeine Theorie der Raumwahrnehmung, für eine, die optische und haptische Raumwelt verbindende Lehre, kamen die Täuschungserscheinungen, gerade wegen der einseitigen

¹⁾ LIPPS, TH., *Raumaesthetik und geometrisch-optische Täuschungen.* 1897.

²⁾ RÉVÉSZ, G., *Experiments on Animal Space Perception.* *British Journal of Psychology* XIV. 1924.

optischen Orientierung kaum in Betracht. Man hat zwar eine Anzahl Übereinstimmungen zwischen beiden Sinnesgebieten festgestellt, aber ein einheitliches, beide umfassendes Prinzip liess sich bisher nicht finden.

Die Vernachlässigung dieses Problems war aber theoretisch in keiner Weise gerechtfertigt. Die Rolle der Motorik bei unseren Handlungen und Äusserungen, die Formwahrnehmung bei Hirnverletzten, die Raumwelt der Blinden, die Bedeutung der taktil-kinaesthetischen Erfahrungen bei der haptischen Raumauffassung, die mutmassliche Bedeutung der Haptik bei der Entwicklung unserer geometrischen Anschauungen, wiesen doch mit Nachdruck auf die reichen Beziehungen hin, die zwischen der gnostischen Funktion des haptischen Sinnes und den Problemen der allgemeinen Psychologie, ja sogar der Kunstwissenschaft, der Geometrie und der Philosophie bestehen¹⁾.

Wie ich bereits hier mitgeteilt habe²⁾, stellte sich bei einer raumpsychologischen Untersuchung heraus, dass, mit Ausnahme der perspektivischen Täuschungen und derjenigen, die durch den Bau und die besondere Funktion des Sehapparates bedingt sind, alle Typen der sog. geometrisch-optischen Täuschungen haptisch nachweisbar sind. Also sowohl die linearen und Flächentäuschungen, wie auch die Winkel- und Richtungstäuschungen und nicht weniger die sog. Kontrasttäuschungen lassen sich im haptischen Gebiet unstreitbar feststellen. Es gelang mir nachzuweisen, dass nicht nur die Kundtsche und Müller-Lyersche Streckentäuschungen, sondern auch die Oppelsche, Zöllnersche, Poggendorfsche, Brentanosche, Heringssche Täuschungen, ferner Täuschungsfiguren von Lipps, Botti, Ponzo, wie auch die Trapez- und Kurventäuschung und sogar Täuschungen an dreidimensionalen Gebilden, sowohl rein taktil, also mit Ausschluss der Bewegung der Hände, als auch bei bewegtem Tastorgan, also taktil-kinaesthetisch, wesentlich in gleicher Weise wie optisch erlebt werden. Diese auffallende Übereinstimmungen bezüglich des phänomenalen Charakters einfacher geometrischen Gebilde und Verhältnisse erlauben uns auf die allgemeine *Natur* und auf dem gleichen *Ursprung* der Raumtäuschungen zu schliessen.

Den Ausgangspunkt zu unseren theoretischen Folgerungen, die zu einer durchgreifenden Revision der Lehre von den Raumwahrnehmungen führen sollen, bildet also der Nachweis, dass Raumtäuschungen, die in den bekannten geometrisch-optischen Täuschungen ihren Ausdruck finden, auch im taktilen Gebiet vorliegen, und hier wie dort den gleichen Gesetzen unterworfen sind. Diese den Täuschungserscheinungen zu Grunde liegen-

¹⁾ In der letzteren Zeit lässt sich eine regsamere Arbeit feststellen. Ich verweise auf das grundlegende Buch von KATZ, (Der Aufbau der Tastwelt, 1925), auf die Untersuchungen von GEMELLI, PONZO, BOTTI, ROSENTHAL-VEITH, MONAT-GRUNDLAND, BÜRKLEN usf. ferner auf die Literatur über Hirnverletzten, auf die Forschungen von FUCHS, POPPELREUTER, insbesondere von GELB und GOLDSTEIN.

²⁾ G. RÉVÉSZ, System der optischen und taktilen Raumtäuschungen. Koninkl. Akademie v. Wetensch. Amsterdam. Proc. Vol. XXXI, No. 8. 1929.

den Vorgänge sind weder von der optischen noch von der taktilen Sinnesfunktion bestimmt (Blindgeborene unterliegen denselben Täuschungen); sie sind die natürlichen und notwendigen Folgen unserer *formwahrnehmenden Funktion im Allgemeinen*. Die Täuschungserscheinungen geniessen also keine Sonderstellung innerhalb unserer Raumwahrnehmungen; sie stellen bloss prägnante Äusserungen jener Funktionen oder Tendenzen dar, die bei der räumlichen Gestaltung unserer visuellen und haptischen Eindrücke mitwirken. Es liegt in der innersten *Natur unserer morphogenetischen Funktion*, dass metrische Beziehungen, die schon in den einfachen zwei- und dreidimensionalen Gebilden ihre Verwirklichung finden, von den objektiven Verhältnissen abweichend, im Sinne gewisser Tendenzen wahrgenommen werden. Nach diesen ergibt sich von selbst, dass der Begriff der geometrisch-optischen Täuschung aufzugeben und an seiner Stelle der Begriff der *Raumtäuschung* zu setzen ist. Ob man nun die näheren Bezeichnungen „optisch“ bzw. „taktil“ auch weiterhin beibehalten will, ist nicht mehr eine prinzipielle Frage, sondern bloss eine klassifikatorische Angelegenheit.

III.

Andererseits stellten die Untersuchungen, die über die Frage der Beziehung der raumoptischen Eindrücke zu raumtaktilen von mir angeführt worden sind, sehr *beträchtliche Differenzen* bezüglich des Gestaltungs- und Erkennungsvorganges des optischen und haptischen Sinnes fest¹⁾. Meine neueren Untersuchungen lassen keinen Zweifel darüber bestehen, dass die taktile Wahrnehmung sich von der optischen auch bezüglich des Anteils, den die Anschauung bei der Bildung des Endeindrucks hat, unterscheidet. Es hat sich erstens gezeigt, dass im Taktilen die Teile der betasteten Gegenstände keineswegs durchgängig zu einem Gesamtbild vereinigt werden, sondern als Teilgestalten meistens getrennt, sich *in der Anschauung nicht verbindend*, bestehen bleiben. Anstatt zu einer wohlstrukturierten Gesamtform sich zu erheben, bleibt der fragmentarische Charakter des haptischen Eindruckes bestehen.

Welche Art sind aber diese fragmentarische Gebilde? Sie sind von verschiedener Natur: teilweise taktile und motorische Eindrücke, teilweise optische Hilfsvorstellungen, und dazu noch mehr oder weniger sinnlich transformierte Begriffe. Diese Heterogenität der Gestaltelemente verursacht bei der Bildung einer *Gesamtform* ganz besondere Schwierigkeiten. Gelingt die Optifizierung der haptischen Eindrücke — wie das bei bekannten Figuren meistens der Fall ist — vollkommen, dann scheint eine Verbindung der Teilgestalten wohl möglich zu sein. Bei taktiler Darbietung nicht bekannter und unregelmässiger Figuren jedoch gelangen wir durch die aktive synthetische Tätigkeit (eine besonders entfaltete Funktion der Haptik) zu einem *anschauungsmässigen Gesamtbild nicht*. Die Verbin-

¹⁾ G. RÉVÉSZ, Ueber taktile Agnosie. Haarlem, 1928.

ding zwischen den mehr oder weniger prägnanten Partien vollzieht sich zum Teil mittels des — die Form des Objektes einigermaßen wiedergebenden *Bewegungsbildes*, also *dynamisch*, zum Teil durch *Optifizierung* der haptischen Eindrücke, also *anschaulich*, — vor allem aber mit Hilfe der *begrifflichen Fixierung* der aufeinanderfolgenden Teile und Uebergänge, also *cognitiv*. Allerdings werden wir auch im optischen Gebiet zur begrifflichen Fixierung der formalen Eigentümlichkeiten schreiten müssen, wenn es sich um sprachliche oder zeichnerische Darstellung der Wahrnehmungsinhalte handelt. Der grundlegende Unterschied besteht aber darin, dass im Optischen die begriffliche Festlegung erst *nach* der anschauungsmässigen Auffassung des Gesamtbildes eintritt, dass ferner dieser *analytisch-abstraktive* Vorgang schon das Gesamtbild voraussetzt und sich an ihn anlehnt, während demgegenüber im Haptischen der gleiche Prozess *vor* der intendierten Synthese, und dazu mit *konstruktiver Tendenz* einsetzt. Im Optischen hat weder die Analyse, noch die begriffliche Fixierung einen Anteil an der Gestaltbildung, im Haptischen indessen müssen wir ihr neben seiner gnostischen noch eine konstruktive, bis zu einem gewissen Grade also eine gestaltbildende Bedeutung zusprechen. Diese Erkenntnis führt zur Wiederlegung jener Auffassung, nach der Tastobjekte genau so wie Sehobjekte in der Wahrnehmung, in einer, die wesentlichsten Züge und Formeigenschaften der Dinge in sich vereinigenden einheitlichen Form ins Bewusstsein treten. Nur bei sehr einfachen und bekannten Gegenständen hat dieser aus der Raumoptik stammende Satz Geltung.

Dass die Wahrnehmungselemente von ertasteten, optisch jedoch nicht bekannten Gegenständen in eine eindeutig strukturierte Verbindung nicht eingehen, muss umsomehr auffallen, als die sog. haptische Formwahrnehmung doch erst nach einer langdauernden Prüfung zustande zu kommen pflegt. Nichts bringt diese umständliche und langwierige Prüfung deutlicher zum Ausdruck, als die photographische Registrierung der Tastbewegungen bei der Ertastung einer sehr einfachen Flächenfigur.

In den linearen Lichtkurven (Figur b^1 , b^2 und b^3), welche die tastenden Bewegungen einer mit zwei elektrischen Glühbirnen bewaffneten Hand registrieren (eine Birne auf dem Zeigefinger, die andere auf dem Daumen befestigt), kommen deutlich die Tastbewegungen, welche zur Erkennung und Beschreibung der vorgelegten relativ sehr einfachen Figuren (Figur a^1 , a^2 , a^3) erforderlich sind, zum Ausdruck.

Ein anderer prinzipieller Unterscheid zwischen optischer und haptischer Formwahrnehmung bezieht sich auf die *Erkennungsintention*. Wie ich bereits festgestellt habe ¹⁾ ist die Erkennungsintention im Haptischen auf das „Was“, und nicht auf das „Welches“ gerichtet, auf die Spezies und nicht auf das Individuelle. Charakteristische Einzelheiten an den Dingen lassen sich taktil wahrnehmen, (sie kommen als Erken-

¹⁾ G. RÉVÉSZ, Psychologische Analyse der Störungen im taktilen Erkennen. Z. f. Neurol. u. Psychiatr. Bd. 115. S. 585 und Ueber taktile Agnosie. 1928. S. 1 ff.

nungsmerkmale vor allem in Betracht), aber jene *Individualität*, die sich im Optischen in der Prägnanz der Gesamterscheinung in der Strenge der Gestalt, in der Architektonik des Ganzen erkennen lässt, wird in der Regel nicht erlebt. Werden an einem Ding die Formmerkmale und taktilen Qualitäten auch genau geprüft und eingeprägt, wird das Ding auf Grund dieser Erfahrungen rein taktil auch wiedererkannt, so braucht damit die individuelle Struktur noch nicht gegeben zu werden. Von dieser Anschauung aus lassen die Aussagen der Blinden eine von der üblichen ganz abweichende Deutung zu und führen zu einer durchgreifenden Revision der Blindenpsychologie.

Individuelle Strukturen lassen sich haptisch schon aus dem Grunde nicht erfassen, weil die unmittelbare *Wahrnehmbarkeit von Proportionen* — also eine der Grundvoraussetzungen individueller Gestalten — im haptischen Gebiet zu fehlen scheint. Soweit Proportionen dennoch zur Wahrnehmung gebracht werden, geschieht das nicht wie im Optischen unmittelbar, sondern vorzugsweise *messend*, indem eine natürliche Masseinheit (z.B. abstand zwischen Daumen und einem andern Finger) in möglichst gleichmässiger Weise auf die zu beurteilende Strecke wiederholt aufgelegt wird, oder *schätzend*, etwa auf Grund der Zeitdifferenz, die sich bei der Betastung verschiedene Grössen ergibt. Haptisch sind wir eigentlich nur im stande Gleichheit, Ähnlichkeit und Verschiedenheit zu erleben, mag auch die Verschiedenheit in vielen Abstufungen zum Bewusstsein kommen, aber räumliche Verhältnisse und Proportionen in *ihrer gestaltmässigen Erscheinung* zu erfassen, sind wir nur unter den allergünstigsten Bedingungen fähig¹⁾. Diese Feststellung stimmt gut mit der Anschauung FRIEDMANNs überein, nach dem der haptische Sinn ursprünglich ein metrischer Sinn sein soll, indem er an den Dingen die *quantitativen Verhältnisse*, die messbaren Bestimmtheiten zu erfassen trachtet, während die Optik vorzugsweise auf Wahrnehmung von Relationen, von *Proportionen* gerichtet ist.²⁾

Dass die beschränkte Formaufnahmefähigkeit des haptischen Sinnes auch die ästhetische Erlebnismöglichkeit der Blinden bezüglich der plastischen Künste in Frage stellt, folgt aus dem Gesagten notwendig. Menschen, die wegen des Fehlens der unmittelbaren Proportionenerfassung von den Gegenständen im besten Falle nur einen unbestimmten Gesamteindruck zu gewinnen vermögen, die den Reichtum und die mannigfaltige Gliederung, die strukturelle Gebundenheit eines *ganzen* Gebildes zur Wahrnehmung zu bringen nicht imstande sind, sind von der ästhetischen Formbetrachtung der Natur- und Kunstobjekte nahezu ausgeschlossen. Die durch die betasteten Dinge ausgelösten sinnlich-ästhetischen Stimmungen entstehen bei ihnen nur zum geringsten Teil in folge von Formerlebnissen, vor allem lassen sie sich diese auf Wahrnehmung von Tastqualitäten und vibratorischen Zuständen zurückführen.

¹⁾ Ob ausnahmsweise eine unmittelbare Proportionsauffassung im Taktilen möglich sei, lassen wir hier dahingestellt.

²⁾ FRIEDMANN, H., *Die Welt der Formen*. München 1930.

IV.

Nun ist der Hinweis auf die phänomenologischen gnostischen und morphologischen Unterschiede der optischen und haptischen Wahrnehmung nur die eine Seite der Erkenntnis, die uns zu einer allgemeinen Lehre der Formwahrnehmung verhelfen soll. Auf der anderen Seite steht nämlich die gleichfalls durch empirische Erfahrungen gesicherte Einsicht bezüglich der *eindeutigen Zuordnung* haptischer und optischer Wahrnehmungsdaten. Diese Erkenntnis dürfte nun nach meinen Forschungsergebnissen ihren untrüglichen Beweis in der *Uebereinstimmung der Raumauschungen in beiden Gebieten, in der Einheit der Grössen- und Richtungstäuschungen* finden.

Es erhebt sich in diesem Zusammenhang die wichtige Frage, worauf sich eigentlich diese Uebereinstimmung zwischen optischer und taktiler Wahrnehmungsinhalten, die insbesondere bei den Raumauschungen so deutlich zutage tritt, bezöge? Sie bezieht sich auf die Wahrnehmung und Beurteilung von *Grössenbeziehungen*. Dieser Satz schliesst stillschweigend zwei Behauptungen in sich. Erstens, dass die taktil wahrgenommenen Gebilde von uns in dasselbe räumliche Ordnungsschema eingefügt werden, wie die durch den Gesichtssinn perzipierten. Zweitens, dass zwischen optisch und taktil wahrgenommenen Gebilden in gewisser Beziehung eine erlebnismässige Adäquatheit bestehen muss, trotz der phänomenalen Verschiedenheit optischer und haptischer Gesamteindrücke. Denn es läge doch ein Widerspruch darin, wenn man einerseits behauptete, der taktile Eindruck eines Segmentes z.B. entspräche dem optischen Eindruck *nicht*, während andererseits feststeht, dass zwei untereinander befindlichen Segmente für *beide* Sinne ganz dieselben scheinbaren Abweichungen zeigen. Würde das Segment im Taktilen ganz *anders* erscheinen als im Optischen, so wäre es nicht einzusehen, wieso sich die Täuschung dennoch in gleicher Art und im gleichen Sinne wie im Optischen einstelle.

Entscheidend für eine bevorstehende Revision der Lehre von den Raumwahrnehmungen sind neben den phänomenalen Unterschieden noch die von uns aufgezeigten gnostischen und vor allem morphologischen und struktiven Verschiedenheiten zwischen beiden Sinnesgebieten. In dieser Beziehung scheint von fundamentaler Bedeutung die Erkenntnis zu sein, dass die Auffassung von räumlichen Proportionen und damit zugleich das *aesthetische Formerlebnis* in ihrer reinen Form bloss mit der raumwahrnehmenden Funktion des *Gesichtssinnes* eng verknüpft ist, während unserer *haptischen* Funktion in diesem Zusammenhang nur die Erfassung der *Formähnlichkeit* und *Unähnlichkeit*, oder — nicht im streng mathematischen Sinne genommen — der *Kongruenz* und *Inkongruenz* zukommt. Die Fähigkeit zur Formwahrnehmung wollen wir zwar dem haptischen Sinne nicht absprechen, wohl aber im allgemeinen die Dinge *in ihrer architektonischen Gliederung anschaulich und einheitlich zu erleben*.



a 1

Prüfungszeit 18 Min. (Versuchsperson H.).



b 1



a 3

Prüfungszeit 15 Min. (Versuchsperson B. Maler).



b 3



a 2

Prüfungszeit 12 Min. (Versuchsperson R.).



b 2

Es ist deutlich geworden, dass das Problem der Beziehung der raum-optischen Eindrücke zu den raumtaktilen nur in der Weise geklärt werden kann, dass man versucht die heterogenen und homogenen Züge der beiden raumwahrnehmenden Sinne in allen Richtungen zu ermitteln. Es ist weiterhin klar geworden, dass das einseitige Hervorheben der Verschiedenheit der Eindrücke ebenso zu unzulässigen Vorstellungen führt, wie der besondere Nachdruck auf eine weitgehende Uebereinstimmung. Das erstere muss schon darum vermieden werden, weil doch die Unterschiede, die in phänomenaler, stereognostischer und morphologisch-struktiver Richtung bestehen, durch metrische Uebereinstimmungen bis zu einem gewissen Grade kompensiert werden, die ihrerseits ihren Grund in der Einheit der metrischen Funktion haben.¹⁾

Es ist sogar sehr wohl möglich, dass gerade die einheitlichen metrischen Wahrnehmungen für eine konsequent und widerspruchlos durchgeführte Lehre der anschaulichen Raummetrik, für ein System, welches die Grunderfahrungen der beiden raumwahrnehmenden Sinnen einheitlich zusammenzufassen vermag, die Grundlage bilden wird.

¹⁾ Eine genauere Analyse der Tatbestände und eine Diskussion der hier verwendeten Begriffe soll demnächst in einer ausführlichen Darstellung gegeben werden.

Geology. — *Die falschen und die wahren Mylonite des tertiären Granitkomplexes von Elba.* Von P. DE WIJKERSLOOTH. (Communicated by Prof. H. A. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of May 30, 1931.)

Durch die Arbeiten TERMIERS 1909, 1910 und 1911 (Litt. 19 22 23) ist die Aufmerksamkeit gelenkt worden auf das Auftreten von grossartigen Massen Granit- und Mikrogranitmylonit am östlichen Teile der Insel Elba und auf ein kleines Vorkommen derselben am Ghiaje in der Nähe von Portoferraio.

TERMIER schreibt über die Verbreitung des erstgenannten Mylonitvorkommen wie folgt: „Le granite écrasé, le gneiss écrasé, le microgranite écrasé, forment tantôt à eux seuls, tantôt avec une puissante système de micaschistes posée sur eux, l'étage désigné par le symbole pr^1 sur la carte géologique et décrit par M. LOTTI comme „scisti gneissiformi“ (Litt. 19).

Aus tektonischen und stratigrafischen Studien geht nun die Wahrscheinlichkeit hervor, dass dieser Komplex pr^1 , von LOTTI für präsilurisch gehalten, ein permisches Alter hat und ihresgleichen findet in dem Perm, das als Glied der Toscaniden in den Apuaner Alpen, Süd-Toscana und auf Elba (pm) auftritt. Die Serie pr^1 ist aber kontaktmetamorph verändert in kontaktmineralienführende quarzitisches Glimmerschiefer und Serizit-quarzite. Trotz dieser mehr oder weniger kontaktmetamorphen Umwandlung haben SAVI und MENEGHINI (Litt. 18) diese Gesteine als Verrucano gedeutet und zeichnete COCCHI (Lit. 6) den Komplex pr^1 als Perm auf seiner geologischen Karte ein. Auch B. LOTTI hat sich in dieser Richtung geäussert und hat die quarzitisches Glimmerschiefer von Capoliveri verglichen mit den permischen Phylliten von Boccheggiano (Massa Marittima). In seiner Arbeit (Litt. 11), zwei Jahren vor der Entwicklung der Ueberschiebungstheorie durch MARCEL BERTRAND, war er aber durch die von ihm aufgefundene stratigrafische Folge gezwungen den Komplex pr^1 für präsilurisch zu halten, da er den fossilführenden Silur unterlagert. Wenn man die berühmten Kontaktgesteine (Skarne) am Kontakt zwischen pr^1 und den darüber lagernden triadischen Marmoren (pr^2) am Calamita und an vielen andren Stellen beobachtet, wird es klar, dass der Komplex pr^1 mindestens einer so hohen Temperatur ausgesetzt worden ist als der Bildungstemperatur dieser Kontaktmineralien, da er die benötigte Temperatur von dem Magmaherde nach den Kontakt von pr^1 mit pr^2 übertragen hat. Auch sind pr^3 und pr^4 stellenweise stark kontaktmetamorph verändert. Man kann daher mit Recht Stellung nehmen gegen die von TERMIER geäusserte Meinung, dass der Komplex pr^1 nicht teilweise ihren Grad von Metamorphose der kaustischen Wirkung der Gra-

nitintrusion verdankt. (Litt. 22). Ausserdem bestätigen die mikroskopischen Untersuchungen diese Auffassung durch das generelle Auftreten von Kontaktmineralien in dem ganzen Komplex pr^1 selbst.

Die quarzitischen Glimmerschiefer mit Quarzknuern von Calamita (u.a.) gleichen den Quarzitphylliten mit Quarzknuern des Verrucano, welche in der Gegend von Massa Marittima als einziger Repräsentant des Verrucano auftreten. Häufig aber treten diese Quarzitphyllite in Verhältnis zu den gröberen Gliedern des Verrucano (Konglomeraten, Quarziten und Sandsteinen) ganz zurück und bilden sie nur Bänke zwischen diesen. (M.^{te} Verruca, Montagnola Senese, Jano, Monte Argentario u.s.w.) Die Serizitquarzite von wechselnder Korngrösse des Komplexes pr^1 , welche auf Elba die Glimmerschiefer begleiten, scheinen nun mit diesen Gliedern übereinzustimmen. Glimmerschiefer und Serizitquarzit bilden auf Elba eine einheitliche Formation und scheinen in Verhältnis zueinander zu stehen wie die quarzitischen Phyllite des Verrucano zu Sandsteinen, Quarziten und Konglomeraten dieser Formation. Im Komplex pr^1 haben, wie im Verrucano (Litt. 2), die Glieder von verschiedener Korngrösse fast denselben Mineralbestand und aus diesen Gründen wird der Formationszusammenhang der verschiedenen Schichten der Serie pr^1 bestätigt. Die gröberen Homologen der quarzitischen Glimmerschiefer von pr^1 sind von TERMIER mit den Namen „vrais gneiss“ und „faux gneiss“ angedeutet. Die letzteren sind also von ihm genetisch von den Glimmerschiefern und „vrais gneiss“ abgetrennt worden, obwohl sie denselben Mineralbestand aufweisen. Sie stellen die „zone mylonitique“ vor. Der unmittelbare Uebergang von quarzitischen Glimmerschiefern in die mylonitische Zone von TERMIER lässt sich am Profil im Val Ortana beobachten. Man wird hier getroffen durch die parallele Orientierung der Schichtung der Glimmerschiefer und der sogenannten tektonischen Schieferung der „faux gneiss“ oder „microgranites laminés“. Ebenso ist es auffallend, dass hier fast ungestörte Glimmerschiefer auf einer Zone solcher starker Durchbewegung lagern. Beide Tatsachen scheinen die Auffassung TERMIERs zu widersprechen.

In der Umgebung von Porto Longone findet man geschichtete quarzitisches Gesteine, überlagert von quarzitischen Glimmerschiefern, welche zusammen den Komplex pr^1 bilden. Der Komplex ist durchadert von zahlreichen Aplit- und Quarz-Turmalingängen. Diese geschichteten quarzitischen Gesteine hat TERMIER für Mylonite des tertiären Granits von Elba angesehen. Ihre Schichtung würde von tektonischer Schieferung herühren. Es ist aber fremdartig, dass die Aplitgänge, einmal mitten im Granit aufsetzend, jetzt noch als weisse Linien in diesem sogenannten stark mylonitisierten Granit zu verfolgen sind. Die Aplitgänge des Granits sollten nach TERMIER ihre frühere Orientation beibehalten haben (abgesehen von Detaildislokationen), während der Granit selber zu einem Mylonit mit Lagentextur umgebildet wurde. Dies ist aber schwer denkbar. Bei solcher starken Mylonitisation des Granits würden auch die Aplitgänge in kleinen Stücken in die ganze Mylonitmasse hineingewalzt sein.

Diese von Aplitgängen durchschwärmten Gesteine zeigen sich aber bei näherer Betrachtung als kontaktmetamorphe geschichtete Gesteine. ALOISI zeigte schon 1911 (Litt. 4), dass hier kein Granitmylonit vorliegt, sondern dass wir mit einer kontaktmetamorphen Serie von unbekanntem Alter zu tun haben. Nun ist es unmöglich, dass eine und dieselbe Granit-intrusion, nach Mylonitisierung ihrer äusseren Zone, diese selbst wieder kontaktmetamorph umbildet. Für kontaktmetamorphe Umbildung ist eine zweite Intrusionsphase nötig, welche auf Elba wegen der allgemeinen Kontaktmetamorphose der „faux gneiss“ eine grosse Rolle gespielt haben sollte. Diese hat aber nicht stattgefunden und findet man deshalb auf Elba kontaktmetamorphe Gesteine dann hat man mit Hüllgesteinen des tertiären Granits zu tun und nicht mit etwaigen tektonischen Derivaten von tertiären Graniten. Nun haben petrografische Studien immer ergeben, dass die sogenannte mylonitische Zone TERMIERS kontaktmetamorph beeinflusst worden ist, so dass sie keinen mylonitischen Granit oder Mikrogranit sondern höchstens mylonitische Hüllgesteine des Granits repräsentieren können.

In der Tat ist der tektonische Einfluss an vielen Orten texturbestimmend gewesen. Die Kontaktgesteine von Porto Longone sind vielfach von scheerenden Bewegungen in, von Gleitflächen begrenzte, Stücke verteilt. Die Serizitquarzite von Valdana und Lido sind von Kluftflächen, an denen Bewegungen in kleinem Ausmass manchmal erfolgt sind, durchzogen. Man kann sie mit dem Namen Kakirit (Niggli) bezeichnen. Reibungsmehl findet man öfters in den Kluftflächen. Im Sinne TERMIERS, der „toute roche écrasée“ Mylonit nennt (Litt. 24), werden diese Gesteine dem Mylonittypus angehören. Grosse Differentialbewegungen haben jedoch die Gesteine nicht ergriffen, wodurch die Bezeichnung mit Kakirit vorzuziehen ist.

Auch geht aus den Arbeiten TERMIERS nicht recht deutlich hervor, wie er sich die tektonischen Bewegungen gedacht hat, welche die Ursache der Entstehung dieser Mylonitzone, die eine Mächtigkeit von 150 M. erreichen sollte, gewesen sein kann. Die Decken III und II TERMIERS haben nach ihm die Serie I, welche allein die Granitintrusion mit ihren zahlreichen Verzweigungen in ihrer sedimentären Zone umfasst, überfahren und die Schichten und den Granit der Serie I stark tektonisch mitgenommen. Nach TERMIER wäre es möglich, dass die Serie I selbst quasi autochton sei und nur wenig von ihrer ursprünglichen Stellung losgerückt sei. Es lässt sich dann nicht erklären, weshalb der Granit von Elba so stark mylonitisiert worden ist, zumehr weil der sedimentäre Teil der Serie I selber ein ziemlich tektonisch-ruhiges Bild aufzeigt. Man muss annehmen, wenn wirklich eine derartig mächtige Granitmylonitzone vorhanden ist, dass auch die Schichten der Serie I in die grosse tektonische Verfrachtung einbezogen worden sind und wie die Decken III und II grosse differentielle Bewegungen mit Bezug auf den Granit ausgeführt haben. Nun widersprechen die genau sich dem Granit anschmiegenden Kontaktgesteine die Tatsache, dass sehr grosse

Bewegungen des sedimentären Teiles der Serie I relativ zum Granit stattgefunden haben, obwohl die Auswalzung vieler Kontaktgesteine unbedingt auf tektonische Kleinbewegungen innerhalb der Serie I nach der Intrusion des Granits hinweist.

Aus den oben erörterten Gründen wird es wahrscheinlich, dass die „faux gneiss“ von TERMIER keine Mylonite einer tertiären Granitintrusion vorstellen können, sondern kontaktmetamorphe sedimentäre Gesteine sind, welche zusammen mit den Glimmerschiefern und „vrais gneiss“ dem Trias unterlagern. Es wird daher interessant sein nachzugehen ob uns vielleicht primäre Relikte etwas über das Wesen des Ursprungsgesteins unterrichten vermögen. Zumehr scheint dies lohnend, da vielerorts die Gesteine von pr¹ makroskopisch an Verrucanogesteine erinnern, welche in Toscana und auf Elba selbst ebenfalls dem Trias unterlagern und da eine sehr charakteristische Mineralführung aufweisen.

Die hierunter folgende petrografische Beschreibung der Gesteine von pr¹ behandelt besonders Gesteine von den Stellen, wo TERMIER mit Nachdruck gewiesen hat auf das Vorliegen von Granit- und Mikrogranitmyloniten.

Petrographische Beschreibungen.

Val Ortana.

a. Quarzitisches Glimmerschiefer, den Glimmerschiefern von Calamita gleich, überlagern in geringer Mächtigkeit die Serie der sogenannten Mikrogranitmylonite. Unter dem Mikroskop zeigen diese Glimmerschiefer Serizitbändchen in Alternierung mit Quarzitbändern. Die Quarze haben eine durchschnittliche Grösse von $\pm 0,05$ m.m. Die Serizitbändchen erhalten grosse Mengen von graphitischem Material und Turmalin. Man kann zwei Typen von Turmalin unterscheiden:

1. Grosse gerundete Körner. Sie sind zweifellos allogen und begleiten die anderen schweren Mineralien wie Zirkon und vereinzelt Granat.

2. Idiomorphe hemiedrische Säulchen. Sie haben eine maximale Länge von 0.1 m.m. und eine Mächtigkeit, wechselnd zwischen 0.1—0.02 m.m. Sie treten fast ausschliesslich in den Serizitbändchen auf und tragen meistens an einem Ende eine Rhomboëderbegrenzung. Der Pleochroismus gleicht demjenigen der unter genannten Körnern und ist:

O. grau-grün E. farblos bei blassbraun (fast allgemein auftretend).

O. blau und braun E. farblos bei schwachblau (untergeordnet hinzutretend).

Wenn die idiomorphen Säulchen in den Quarzitbändern auftreten, sind sie von Quarzindividuen umfasst. Sie sind dann ebenso wie der Quarz sedimentogen. Der grosse Reichtum an allogenem Turmalin und Zirkon und die bisweilen sehr grossen Quantitäten von idiomorphem Turmalin in den Serizitbändchen der quarzitisches Glimmerschiefer der Serie pr¹ (wahrscheinlich authigene Neubildung) weisen auf Verrucano hin, da

dieser Mineralbestand gerade für den Verrucano von ganz Toscana und Elba (pm) charakteristisch ist.

b. Die Serizitquarzite oder die sogenannten Mikrogranitmylonite unterscheiden sich allein von den vorgenannten quarzitischen Glimmerschiefern durch ihre grössere Korngrösse. Sie beträgt für den Quarz durchschnittlich 0.08—0.12 m.m. Serizitreiche Bändchen alternieren auch hier mit Quarzitbändern. Grosse Orthoklasindividuen von 2,5 m.m. treten hinzu. Sie sind gerundet und nicht kataklastisch. Der Ankrystallisation, welche die ursprüngliche Form der detritischen Quarze und etwaigen Quarzitkonglomeratstücke verwischt hat, sind diese Orthoklase nicht ausgesetzt worden und sie geben durch ihre abgerundete Form und Grösse einen Einblick in das Wesen der primären Quarze und Quarzitstücke. Ueber die primären Konglomeratstücke unterrichtet uns das Auftreten von Turmalinolite- das sehr charakteristische Bestandteil des Verrucano (Litt. 5 u 12). Obwohl in Val Ortana ziemlich wenig auftretend, erscheinen sie am Valdana und Lido in grossen Quantitäten.

Turmalin erscheint hier nämlich in drei verschiedenen Weisen:

1. als Bestandteil von Konglomeratstücken — den Turmalinoliten.

Diese bestehen aus in einer Quarzitmasse massenhaft zusammen auftretenden Turmalinstäbchen. Der Turmalin ähnelt völlig dem idiomorphen Turmalin der obengenannten quarzitischen Glimmerschiefer. Sie zeigen gleiche Ausbildung, Grösse und Farben. Die Mächtigkeit der Stäbchen kann hier aber zu ausserordentlicher Kleinheit (bis 0,003 m.m.) herabsinken. Die Individuen tragen manchmal vielfaserige Endbegrenzungen. Die Turmalinolite haben eine durchschnittliche Grösse von 0,5—1,0 c.m. Die ursprüngliche Gerölleform erscheint mitunter abgeplattet und diese Turmalinolite beweisen den psephitischen Charakter des Ursprungsgesteins.

2. Als Einschluss in den selbständig-sedimentierten Quarzkörnern.

In dieser Weise kann der allogene Turmalin ohne Abrundung in die Sande hineingelangen und so sieht man idiomorphe, von Quarz umfasste, Turmaline in den Quarzritbändern von Val Ortana.

3. Als Einzelindividuum.

a. als gerundete Körner. Begleitet von viel allogenem Zirkon und von weniger Granat, Epidot, Apatit, Rutil und Zoisit. Die Korngrösse dieser Turmaline ist ungefähr dieselbe als die der obengenannten allogen Mineralien. Sie sind parallel zu der allgemeinen Schichtung angeordnet.

b. als idiomorphe hemiedrische Säulchen. Sie treten wie in den quarzitischen Glimmerschiefern in den Serizitbändern auf. Schon ist hervorgehoben, dass der Verrucano von Toscana und Elba (pm) auch derartige Turmalinsäulchen reichlich enthält. Untersucht man aber die dem Verrucano begleitenden Formationen von Toscana und Elba auf ihren Gehalt an Turmalin dann findet man niemals einen nennenswerten Gehalt derselben an diesem idiomorphen Turmalin. Von den Konglomeratstücken des Macigno (Eozän) von Prata (Massa Marittima) zeigen ausschliesslich

die Verrucanostücke idiomorphe Turmaline, obgleich viele gleichwertige Konglomeratstücke anderer Formationen Toscanas diese begleiten. Hieraus geht hervor, dass keine post-tertiäre Bo-Emanationen diese Turmaline gebildet haben, sondern dass diese idiomorphen Turmaline schon in Eözäner Zeit im Verrucano anwesend waren.

Da der Verrucano in seiner Konglomeratfacies deutlich die Abtragungsprodukte palaeozoischer Turmalinquarzmassen und Turmalingraniten führt, ist es möglich, dass der allogene Turmalin während der Diagenese und der Metamorphose des Verrucano teilweise in diesen authogenen Turmalin umkristallisiert wurde.

RAMMELSBERG und INOSTRANZEFF (Litt. 26) haben auf derartige Vorgänge gewiesen. INOSTRANZEFF zählt den Turmalin zu den „beweglichen“ Mineralien. Obwohl die richtige Genese noch nicht sichergestellt werden kann, geht doch als wertvolles Resultat aus diesen Untersuchungen hervor, dass das Auftreten dieser grossen Mengen von idiomorphem Turmalin ebenso charakteristisch für das Wesen des Verrucanos ist wie das Auftreten von Turmalinolit. Die Kombination von Turmalinolit, Turmalinführenden detritischen Quarzen, grossen gerundeten Turmalinen und von grossen Mengen authigener Turmaline der Serie pr^1 von Val Ortana oder der „zone mylonitique“ von TERMIER weist deshalb unzweideutig auf die Verrucano-natur dieser Serie hin.

c. als kontaktpneumatolytische Neubildungen. Vereinzelt sieht man gruppenweis auftretende grosse Turmaline von idiomorphem Habitus. Sie finden sich der Hauptsache nach in den mehr metamorphen Gliedern (insbesondere in denjenigen von Porto Longone) vor.

Die Serizitquarzite der Serie pr^1 von Val Ortana sind ziemlich stark kontaktmetamorph. Als kontaktmetamorphe Neubildungen sind Biotit, Muscovit und Amfibol allgemein verbreitet. Typisch ist die reichere Entwicklung von Biotit und Amfibol die Klufflächen entlang. Dies steht vielleicht im Zusammenhang mit leichterem Eisenzufuhr.

Schon vorher ist betont worden, dass diese kontaktmetamorphe Umbildung der Serie pr^1 nicht übereinstimmt mit der Auffassung, dass Mylonite eines tertiären Mikrogranits unter der heutigen Form von Serizitquarziten der Serie pr^1 von Val Ortana vorliegen.

Die sogenannten Mikrogranitmylonite erweisen sich aber als kontaktmetamorphe, nicht sehr stark tektonisch beeinflusste konglomeratische und grobklastische Gesteine, die ihrer Mineralführung nach den Verrucanogesteinen ähnlich sind, (siehe unten).

Porto Longone.

In der nächsten Nähe von Porto Longone findet man fast ungeschichtete Hornfelse, welche allmählich in kontaktmetamorphe geschichtete Quarzite übergehen die ihrerseits in der Nähe von Terra Nera von quarzistischen Glimmerschiefern (identisch mit denjenigen von Calamita und

Val Ortana) überlagert werden. Diese Gesteine sind sehr stark aplitisch durchadert und sind von TERMIER für Granitmylonite gehalten worden. Schon zeigte ALOISI 1910 und 1911, dass hier normale Kontaktgesteine vorliegen. Biotit und Andalusit treten in erheblichen Mengen auf und bilden mit granoblastischem Quarz die Hauptmasse dieser Gesteine. Der Andalusit ist meist stark in Serizit umgewandelt. Graphit ist allgemein verbreitet. Amfibole sind in kleinen garbenförmigen Gebilden angeordnet. Sie befinden sich insbesondere in den wenig kontaktmetamorphen Glimmerschiefern. Feldspat ist stellenweise vorhanden. Bestimmt wurden Orthoklas und Albit. Grossblättrige Muscovite und Amfibole gehören der äusseren Kontaktzone an. Als primäre Relikte kann man noch Turmalin und Zirkon beobachten, welche in Linien parallel zu der allgemeinen Schichtung gelegen sind. Dieser Turmalin muss unterschieden werden von dem stellenweise auftretenden pneumatolytischen Turmalin. Die Gesteine von Porto Longone zeigen sich als die Aequivalente der Gesteinsserie von Val Ortana. Sie sind aber meistens stärker kontaktmetamorph und stärker tektonisch beeinflusst. Die Hornfelse in der Nähe von Porto Longone sind nämlich von Gleit- und Kluftflächen durchschwärmt.

Valdana und Lido.

In einem Aufschluss am Wege Porto Longone-Portoferraio bei Punkt 20 der geologischen Karte am Valdana zeigte TERMIER den Mitgliedern des italienischen Geologenkongress zu Portoferraio in 1910 die Serizit-quarzite der Serie pr¹ als Mikrogranitmylonite. Die Quarzite haben eine sehr ausgesprochene Klüftung. Sie zerfallen in von Kluftflächen begrenzte Teile. Serizit hat sich bisweilen die Kluftflächen entlang entwickelt. Die Gesteine von Lido zeigen auch zahlreiche klaffende Spalten, welche zum Teil mit Reibungsmehl ausgefüllt sind.

Die Quarze sind meistens undulös, bisweilen die Mineralien kataklastisch und von neogenen Quarzadern verkittet. Aber keine nennenswerten relativen Bewegungen haben die ganze Gesteinsmasse erfasst. Die sogenannte mylonitische Schieferung ist sedimentäre Schichtung. Hierauf weisen die Mineralrelikte hin, welche in diesen Schichtungsflächen gelegen sind. Wo sich eine sehr feine Alternierung zwischen den Serizitbändchen und Quarzitbändern vorfindet, treten mitunter schöne Detailverfaltungen in Erscheinung.

Makroskopisch kann man leicht rose Quarze und Turmalinolite auffinden. Am Lido sind sie am häufigsten anzutreffen. Beide weisen deutlich auf Verrucano hin. Am Valdana kann man Gesteine sammeln, die fast ausschliesslich aus 2—3 m.m. grossen Quarzen bestehen. Die grossen Quarze sollen nach TERMIER die wenig zertrümmerten Phenokriste des Mikrogranits vorstellen, aber ihre Anhäufung zu massigen grobkörnigen Quarziten wird dadurch nicht erklärt. Die gleiche Korngrösse der Mineralien ist mehr mit einem sedimentären Ursprung in Uebereinstimmung. Am Valdana wechseln manchmal Andalusitbändchen mit den Quarzitbändern

ab. Der Andalusit ist hier sehr feinkörnig entwickelt, und ist durch die Kontaktmetamorphose an die Stelle des Serizits getreten. Dieser feine Andalusit geht wieder in Serizit über. In den Andalusitbändchen sind noch die primären Relikte (Turmalin und Zirkon) deutlich zu sehen. Sie stimmen völlig mit den allogenen und authigenen (?) Turmalinen von Val Ortana überein. Rutil und Monazit (aufgefunden mit Hilfe von schweren Flüssigkeiten) treten vereinzelt auf. Neben Andalusit ist Biotit und Muscovit allgemein verbreitet.

Die granoblastischen Quarze von Lido sind im allgemeinen feinkörniger als diejenige von Valdana. Die Kontaktmetamorphose ist hier etwas weniger intensiv gewesen und deshalb ist nur ein geringer Teil der Serizitbändchen von Andalusit ersetzt worden. Grossblättrige Muscovite befinden sich in den Serizitbändchen. Orthoklase, bisweilen zerklüftet und von neogenem Quarz verkittet, erscheinen als grosse Augen und sind denjenigen von Val Ortana identisch.

Die Gesteine von Valdana und Lido unterscheiden sich genetisch nicht von denjenigen von Val Ortana, Porto Longone, und von den Gesteinen von P. ALOISI beschrieben zwischen Porto Longone und Mar di Carvisi (Litt. 3.) Auch hier sind es kontaktmetamorphe Verrucanogesteine, aber etwas stärker tektonisch beeinflusst.

Calamita.

Die quarzitischen Glimmerschiefer mit Quarzknuern von Calamita sind eben wie die ganze Serie pr¹ kontaktmetamorph umgebildet worden. Andalusit und Muscovit sind in grossen Mengen entwickelt. Der Andalusit umschliesst meistens Graphitblättchen, welche in grossen Quantitäten anwesend sind. Das Ursprungsgestein ist manchmal durch die Kontaktmetamorphose verwischt worden. Die kleinen Turmalinsäulchen sind mitunter noch deutlich wahrnehmbar. Diese quarzitischen Glimmerschiefer von Calamita sind ohne Zweifel kontaktmetamorphe Phyllite mit Quarzknuern des Verrucano.

Vergleich mit Verrucano-Gesteinen.

Um einen Vergleich mit Verrucanogesteinen machen zu können, wurden die permischen Phyllite, Quarzite und Konglomerate von Elba, die permischen Phyllite von Massa Marittima und die permischen Glimmerquarzite von Val di Castello, M^{te} Arsiccio und Farnocchia in den Apuaner Alpen näher studiert. Ausserdem wurde die vorzügliche Arbeit von D'ACHIARDI (Litt. 2) über die Verrucanogesteine der Monti Pisani benutzt.

Durch diese Studien konnten die nachfolgenden allogenen und charakteristischen authigenen Bestandteile der Verrucanogesteine festgestellt werden: ¹⁾

¹⁾ Wenn der Komponent authigen ist, ist dies zwischen Klammern erwähnt.

Hauptgemengteile des Verrucano:

Quarz, manchmal rosa gefärbt. Serizit und Chlorit (beide authigen).

Nebengemengteile:

Turmalin.

a. Allogen.

1. Als Turmalinolit — Grosse Mengen von idiomorphem Turmalin stecken in einer Quarzitmasse. Die Turmaline sind meistens nicht länger als 0.1 m.m. und haben eine Mächtigkeit von 0.1—0.003 m.m. Pleochroismus O. grau-grün E. farblos-blassbraun, oder seltener O. blau oder braun E. farblos oder schwachblau.

2. Als Einschlüsse in Quarzkörnern. Der Turmalin ist wie unter ausgebildet.

3. Als grosse gerundete Körner.

b. Authigen. (?)

Als idiomorphe Kristalle in den Serizitbändchen auftretend. Der Turmalin ähnelt dem Turmalin unter a 1 und a 2 erwähnt.

Feldspat. Nicht selten. Meistens Orthoklas.

Zirkon. Reichlich. Bisweilen in deutlich gerundeten Körnern.

Kohlige Substanzen. Bisweilen reichlich.

Rutil und Eisenoxyd (beide authigen). Bisweilen reichlich.

Acessoria:

Granat, Apatit, Rutil, und Zoisit.

Vergleichen wir diese allogenen und authigenen Bestandteile des Verrucano mit den unterstehenden allogenen Bestandteilen der Serie pr¹:

Hauptgemengteile der Serie pr¹:

Quarz, manchmal rosa gefärbt. Serizit (authigen).

Nebengemengteile:

Turmalin. Sowohl die verschiedenen allogenen Turmalintypen wie die authigen Turmaline des Verrucano treten hier in gleicher Bedeutung auf.

Feldspat. Nicht selten. Orthoklas ist allein aufgefunden worden.

Zirkon. Reichlich. Bisweilen in deutlich gerundeten Körnern.

Graphitisches Material. Bisweilen reichlich.

Rutil und Eisenoxyd (beide authigen). Bisweilen reichlich.

Acessoria:

Granat, Apatit, Rutil, Epidot, Zoisit und Monazit.

Mann ersieht sofort, dass eine grosse Ähnlichkeit vorliegt, besonders weil die allogene und authigene Mineralkombination eine sehr charakteristische ist. Aus diesem Vergleich geht also hervor, dass die Serie pr¹ aus mineralogischen Gründen dem Verrucano gleich zu stellen ist.

Mikrogranitmylonit von Ghiaje bei Portoferraio.

Etwas östlich von Portoferraio sieht man an der Küste von Ost nach

West die nachfolgende Schichtfolge: Serpentin, mylonitisierten Serpentin (2 M.), gewalztes Eozän (8 M.) Mikrogranitmylonit mit grossen Mikrogranitbrocken und Eozänbreccie-Stücken (5 M.) und zum Schluss ungestörten Mikrogranit. Das Fallen ist 40° W. Untersucht man mikroskopisch die in dem Mikrogranitmylonit liegenden Mikrogranitbrocken, dann sieht man, dass Phenokriste von korrodiertem Quarz, Feldspat (Orthoklas und Albit) und Biotit (teils gebleicht) in einer feinkörnigen, hypokristallinen Grundmasse liegen. Bei grösserer Vergrösserung unterscheidet man Orthoklas und Quarz in der Grundmasse. Der grösste Teil der Grundmasse bleibt aber unbestimmbar. Untersucht man nun die mylonitische Masse, in welcher die Mikrogranitbrocken sich neben Eozänbrecciestücken vorfinden, dann zeigt sich, dass der Unterschied mit dem nicht durchbewegten Mikrogranit sich durch eine braune (eisenschüssige) Farbe der Grundmasse und durch darin schwimmende scharfkantige Brecciestücke der Phenokriste (Quarz und Feldspat) in Begleitung von verbogenen Biotitphenokristen hervorhebt. Hier kommt manchmal hinzu, dass man kleine eozäne Schiefertheile in dieser braun gefärbten verkneteten Mikrogranitgrundmasse liegen sieht. Obwohl es immer schwer bleibt mylonitische Mikrogranitgrundmassen von tektonisch ungestörten zu unterscheiden, machen die braune schmutzige Farbe und die zerbrochenen und gebogenen Phenokriste es möglich mikroskopisch die mylonitischen und nicht-mylonitischen Teile zu unterscheiden. Makroskopisch gleichen diese Mylonite den Verwitterungsprodukten des Granits, obwohl am Ghiaje eine deutliche geflammte Textur das Vorliegen von Myloniten schon makroskopisch betont.

Zusammenfassung.

Der Komplex pr¹ der geologischen Karte von Elba enthält mehr oder weniger kontaktmetamorphe quarzitishe Phyllite, Quarzite und Konglomerate des Verrucano. Die kontaktmetamorphe Umbildung dieser Serie pr¹ durch die tertiäre granitische Intrusion ist nicht in Uebereinstimmung mit der Auffassung von TERMIER, dass mächtige Zonen von Myloniten des tertiären Granitkomplexes in dieser Serie vorhanden sind. Die sogenannten Mikrogranitmylonite und Granitmylonite TERMIERS, die diesem Komplex pr¹ angehören, sind nach meiner Auffassung tektonisch beeinflusste Quarzite und Konglomerate des Perms.

Wahrer Mikrogranitmylonit kommt aber am Ghiaje vor und weiter nach Süden an demselben Kontakt zwischen Eozän und Mikrogranit. Dass auch Mylonite der tertiären Granitintrusion und ausgewalzte kontaktmetamorphe Hüllgesteine vorkommen ist wichtig für die Deutung der tektonischen, magmatischen, und metallogenetischen Evolution Elbas.

LITTERATUR.

1. A. D'ACHIARDI. Tormalinolite del Bottino nelli Alpi Apuani. Proc. Verb. Soc. Toscana di Sc. Nat. 1885.
2. ——— Le rocce del Verrucano nelle Valli d'Agnano nei Monti Pisani, Atti d. Soc. Tosc. di Sc. Nat. Mem. Vol. 12, 1892.

3. P. ALOISI. Rocce granitiche negli scisti della parte orientale dell'isola d'Elba. Atti d. Soc. Tosc. di Sc. Nat. Mem. Vol. 26, 1910.
4. ———. Le cosidette Miloniti dell' isola d'Elba. Atti d. Soc. Tosc. di Sc. Nat. Mem. Vol. 27, 1911.
5. L. BUSATTI. Tormalinolite di Cucigliana e Rupe Cava (Monte Pisano) e di Jano presso Volterra. Atti d. Soc. Tosc. di Sc. Nat. Proc. Verb. Vol 5. 1887.
6. I. COCCHI. Descr. geol. dell'Isola d'Elba. Mem. p. serv. a. Descr. d. Carta Geol. d'Italia Vol. 1. 1871.
7. A. DEMAY. Sur la zone mylonitique de Grimaud. C.R. Ac. Sc. t. 184 1927.
8. ———. La zone mylonitique de Grimaud et la tectonique du Massif des Maures. Bull. Soc. Géol. de France. 1927.
9. L. DÉVERIN. Etude lithologique des Roches Crétacées des Alpes-Maritimes. Bull. Serv. Carte géol. France T. 26. N°. 150. 1923.
10. GRUBENMANN—NIGGLI. Die Gesteinsmetamorphose I, 1924.
11. B. LOTTI. Descr. geol. dell'Isola d'Elba. Mem. Descr. d. Carta Geol. d'Italia. Vol. II.
12. ———. La riunione della Soc. geol. italiana a Portoferraio e l'ipotesi del Termier sulla tettonica dell'isola d'Elba. Boll. R. Com. Geol. l'Italia 1910.
13. ———. Verrucano e pseudoverrucano in Toscana. Boll. R. Com. Geol. d'Italia 1910.
14. ———. Geologia della Toscana. Mem. descr. della Carta Geol. d'Italia. Vol. 13. 1910.
15. A. MICHEL—LEVY. Sercitoschistes des chaines de Mont Blanc et des Aiguilles Rouges, qui sont des mylonites récrystallisées postérieures au granite. Bull. Soc. Geol. de France. 1928.
16. V. NOVARESE. Il presunto piano milonitico dell'Isola d'Elba. Boll. R. Com. Geol. d'Italia. 1910.
17. E. RAGUIN. Au sujet de divers genres de mylonites granitiques le long des lignes de dislocation de l'ouest du Plateau Central. Bull. d. Serv. d. la Carte géol. de France. Tome 24. 1925—1926.
18. SAVI e MENEGHINI Considerazioni sulla geol. strat. della Toscana. Firenze 1851.
19. P. TERMIER. Sur les granites, les gneiss et les porphyres écrasés de l'île d'Elbe. C.R. Ac. Sc. t. 148. 1909.
20. ———. Sur les nappes de l'île d'Elbe. C.R. Ac. Sc. t. 148. 1909.
21. ———. Sur les relations tectoniques de l'île d'Elbe avec la Corse et sur la situation de celle-ci dans la chaîne alpine. C.R. Ac. Sc. t. 149. 1909.
22. ———. Sur la tectonique de l'île d'Elbe. Bull. de la Soc. Geol. de France. 1910.
23. ———. Sur les mylonites de l'île d'Elbe. C.R. Ac. Sc. t. 152.
24. P. TERMIER et EUG. MAURY. Nouvelles observations géologiques dans la Corse orientale: phénomènes d'écrasement et de laminage; mylonites et brèches tectoniques. C.R. Ac. Sc. 1928.
25. N. TILMANN. Tektonische Studien in der Catena metallifera Toscanas. Geol. Rundschau Sonderb. 1926.
26. A. WICHMANN. Turmalin als authigener Gemengteil von Sanden. N.J. 1880. II.

GAYLORD			PRINTED IN U.S.A.

GAYLORD

PRINTED IN U.S.A.